УДК 517.5 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 1

ОЦЕНКИ НОРМЫ ФУНКЦИИ, ОРТОГОНАЛЬНОЙ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ, ЧЕРЕЗ МОДУЛИ НЕПРЕРЫВНОСТИ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

О. Л. Виноградов, Л. Н. Ихсанов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

В работе устанавливается оценка равномерной нормы функции, заданной на числовой прямой и имеющей нулевой интеграл между любыми целыми точками, через ее модуль непрерывности любого четного порядка. Точные оценки такого вида известны для периодических функций. Переход к непериодическим функциям существенно усложняет задачу. Постоянные в оценке улучшены по сравнению с ранее известными. Доказательство основано на представлении погрешности полиномиальной интерполяции в виде произведения многочлена влияния на обынтегрированную разность высокого порядка. Библиогр. 5 назв.

Ключевые слова: модуль непрерывности, интерполяция в среднем.

1. Введение. Обозначим через B_0 множество заданных на $\mathbb{R}$ функций f, локально интегрируемых и таких, что $\int_n^{n+1} f(x)\,dx = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Пространство функций может быть как вещественным, так и комплексным. Конечные разности, норма и модули непрерывности f определяются равенствами

$$\delta_t^r f(x) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j C_r^j f\left(x + \frac{rt}{2} - jt\right), \quad \Delta_t^r f(x) = \delta_t^r f\left(x - \frac{rt}{2}\right),$$

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|, \qquad \omega_r(f,h) = \sup_{0\le t\le h} \left\|\delta_t^r f\right\|.$$

Ю. В. Крякин [1] рассматривал следующую задачу. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Требуется найти наилучшую константу K в неравенстве

$$\|f\| \le K \cdot \omega_{2m}(f,1), \quad f \in B_0, \tag{1}$$

т. е. величину

$$W_{2m} = \sup_{f\in B_0} \frac{\|f\|}{\omega_{2m}(f,1)}$$

(полагаем $\frac{0}{0} = \frac{\pm\infty}{+\infty} = 0$).

Для подкласса 1-периодических функций f из B_0 (т. е. функций с нулевым средним) точная константа в неравенстве (1) равна $\frac{1}{C_{2m}^m}$. Оценка сверху общеизвестна и вытекает из тождества

$$f(x) = \frac{(-1)^m}{C_{2m}^m} \cdot 2 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \delta_t^{2m} f(x)\,dt.$$

Оценка снизу установлена в [2], причем она реализована на классе четных непрерывных функций с неотрицательными коэффициентами Фурье. В общем случае Крякин [1] получил неравенство

$$W_{2m} \le \frac{1+H_m}{C_{2m}^m}, \tag{2}$$

где $H_m = \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{1}{j}$, и уточнил его для $m = 1$: $W_2 < 0{,}6244 < \frac{5}{8}$. В настоящей работе предлагается совсем простое доказательство конечности величин W_{2m} и улучшается оценка (2). Именно, доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$W_{2m} \leq \frac{1}{C_{2m}^m} + \frac{2m+1}{2^{4m+1}} C_{2m}^m H_m. \tag{3}$$

В частности, $W_4 \leq \frac{391}{1536}$, $W_6 \leq \frac{4997}{61440}$.

Замечание 1. Из неравенства

$$\frac{C_{2m}^m}{2^{2m}} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} < \frac{1}{\sqrt{2m+1}}$$

(см., например, [3, задача 10]) следует, что оценка (3) улучшает (2) при каждом m. При $m = 1$ неравенство (3) не ново, так как его правая часть равна $\frac{11}{16}$, что больше $\frac{5}{8}$.

Замечание 2. По формуле Стирлинга $C_{2m}^m \sim \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}}$, откуда

$$\frac{2m+1}{2^{4m+1}} \left(C_{2m}^m\right)^2 H_m \sim \frac{1}{\pi} H_m \sim \frac{1}{\pi} \ln(m+1).$$

Таким образом, асимптотически оценка (3) в π раз лучше, чем (2). Вопрос, можно ли в (2) заменить логарифмически растущий множитель $1 + H_m$ на ограниченный, остается открытым.

2. Доказательство результата. Нам понадобится одна известная сумма [4, гл. 2, задача 17]. Для полноты изложения вычислим ее.

Лемма 1. *Если* $m \in \mathbb{N}$, *то*

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{C_{2m}^{m-j}}{j \cdot C_{2m}^m} = \frac{H_m}{2}.$$

Доказательство леммы. Обозначив искомую сумму I_m, имеем

$$I_m = \sum_{j=1}^{m} \frac{(m!)^2}{(m-j)!\,(m+j)!\,j} = \sum_{j=1}^{m} C_m^j \frac{m!\,(j-1)!}{(m+j)!} =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} C_m^j \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(j)}{\Gamma(m+j+1)} = \sum_{j=1}^{m} C_m^j \mathrm{B}(j, m+1).$$

Пользуясь интегральным представлением бета-функции, находим

$$I_m = \sum_{j=1}^{m} C_m^j \int\limits_0^1 t^{j-1}(1-t)^m\,dt = \int\limits_0^1 \frac{(1+t)^m - 1}{t}(1-t)^m\,dt.$$

Отсюда

$$I_m - I_{m-1} = \int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{t}\big(((1+t)^m - 1)(1-t) - (1+t)^{m-1} + 1\big)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{t}\big(-t^2(1+t)^{m-1} + t\big)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (1-t)^{m-1}\,dt - \int\limits_0^1 t(1-t^2)^{m-1}\,dt = \frac{1}{m} - \frac{1}{2m} = \frac{1}{2m}.$$

Следовательно,

$$I_m = I_1 + \sum_{k=2}^m (I_k - I_{k-1}) = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^m \frac{1}{2k} = \frac{H_m}{2}. \quad \blacksquare$$

Доказательство теоремы. Пусть $f \in B_0$. Оценим $f(x)$ при каждом $x \in \mathbb{R}$. Не уменьшая общности, можно считать, что $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, а $\omega_{2m}(f,1) = 1$. Обозначим

$$F(z) = \int\limits_0^z f(x)\,dx;$$

тогда $F(n) = 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Запишем тождество

$$f(x) = \frac{(-1)^m}{C_{2m}^m} \int\limits_0^1 \delta_t^{2m} f(x)\,dt + R_m(x), \tag{4}$$

где

$$R_m(x) = f(x) - \frac{(-1)^m}{C_{2m}^m} \int\limits_0^1 \delta_t^{2m} f(x)\,dt =$$

$$= \frac{(-1)^m}{C_{2m}^m} \int\limits_0^1 \sum_{j=1}^m (-1)^{m-j} C_{2m}^{m-j} \big(f(x+jt) + f(x-jt)\big)\,dt =$$

$$= \frac{1}{C_{2m}^m} \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \frac{C_{2m}^{m-j}}{j} \big(F(x+j) - F(x-j)\big)\,dt. \tag{5}$$

Пусть еще

$$\Omega(z) = \Omega_{2m+1}(z) = \prod_{k=-m}^m (z-k),$$

$L_{2m,a}F$ — многочлен степени не выше $2m$, интерполирующий F в узлах $a+k$, где $k \in [0:2m]$. Воспользуемся представлением погрешности интерполяции из [5]:

$$F(z) - L_{2m,a}F(z) = \frac{\Omega(z-m-a)}{(2m)!} \int_0^1 \Delta_u^{2m} f(au + z(1-u))\,du.$$

По условию многочлен $L_{2m,a}F$ тождественно равен нулю при любом $a \in \mathbb{Z}$. Полагая $z = x \pm j$, $a = \pm j - m$, получаем

$$F(x \pm j) = \frac{\Omega(x)}{(2m)!} \int_0^1 \Delta_u^{2m} f((\pm j - m)u + (x \pm j)(1-u))\, du.$$

Отсюда

$$F(x \pm j) \leqslant \frac{|\Omega(x)|}{(2m)!}. \tag{6}$$

В произведении

$$|\Omega(x)| = (m + x) \prod_{k=1}^{m} \big((k - 1 + x)(k - x)\big)$$

каждый множитель неотрицателен и принимает наибольшее значение в точке $\frac{1}{2}$. Поэтому

$$|\Omega(x)| \le \left|\Omega\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{2^{2m+1}} \prod_{k=-m}^{m} |1 - 2k| = \frac{(2m+1)!!(2m-1)!!}{2^{2m+1}}. \tag{7}$$

Сопоставляя формулы (5)–(7) и лемму 1, получаем неравенство

$$|R_m(x)| \le \frac{(2m+1)!!(2m-1)!!}{C_{2m}^m (2m)!\, 2^{2m}} \sum_{j=1}^{m} \frac{C_{2m}^{m-j}}{j} = \frac{2m+1}{2^{4m+1}}\, C_{2m}^m H_m.$$

Из представления (4) следует оценка

$$|f(x)| \le \frac{1}{C_{2m}^m} + |R_m(x)|,$$

что завершает доказательство. ■

Замечание 3. В доказательстве теоремы 1 получена поточечная оценка. Запишем ее, учитывая симметрию задачи:

$$|f(x)| \le \frac{1}{C_{2m}^m} \left(1 + \frac{2|\widetilde{\Omega}_{2m+1}(x)|}{(2m)!} \sum_{j=1}^{m} \frac{C_{2m}^{m-j}}{j}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$|f(x)| \le \frac{1}{C_{2m}^m} + \frac{|\widetilde{\Omega}_{2m+1}(x)|}{(2m)!} H_m, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $\widetilde{\Omega}_{2m+1} = \Omega_{2m+1}$ на $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\widetilde{\Omega}_{2m+1}(1-x) = \widetilde{\Omega}_{2m+1}(x)$, функция $\widetilde{\Omega}_{2m+1}$ имеет период 1. При $x \in \mathbb{Z}$ второе слагаемое обнуляется.

Литература

1. *Kryakin Yu.* Whitney's theorem for oscillating on $\mathbb{R}$ functions. arXiv: math/0612442v1, 2006.

2. *Виноградов О. Л., Жук В. В.* Точные оценки отклонения среднего значения периодической функции через модули непрерывности высших порядков // Проблемы математического анализа. Вып. 22. 2001. С. 3–26.

3. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: ГИФМЛ, 1963.

4. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества. М.: Наука, 1982.

5. *Жук В. В., Натансон Г. И.* К теории кубических периодических сплайнов по равноотстоящим узлам // Вестник ЛГУ. Сер. 1, № 1, вып. 1, 1984. С. 5–11.

Статья поступила в редакцию 22 октября 2015 г.

Сведения об авторах

Виноградов Олег Леонидович — доктор физико-математических наук, доцент, профессор; olvin@math.spbu.ru

Ихсанов Лев Назарович — аспирант; lv.ikhs@gmail.com

ESTIMATES OF THE NORM OF A FUNCTION ORTHOGONAL TO PIECEWISE-CONSTANT FUNCTIONS BY MODULI OF CONTINUITY OF HIGH ORDER

Oleg L. Vinogradov, Lev N. Ikhsanov

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; olvin@math.spbu.ru, lv.ikhs@gmail.com

In the paper, we estimate the uniform norm of a function defined on the real line and having zero integrals between integer points by its modulus of continuity of arbitrary even order. Sharp estimates of such kind are known for periodic functions. The passage to non-periodic functions essentially complicates the problem. In general, the constant for non-periodic functions is greater than for periodic ones. The constants in the estimate are improved in comparison with those known earlier. The estimates under discussion have something in common with the problem of finding the Whitney constants, i.e. the constants in the inequalities between the best approximations and the moduli of continuity of a function defined on the segment. The proof is based on the representation of the error of the polynomial interpolation as a product of the influence polynomial and the integrated difference of high order. We also obtain pointwise estimates in terms of moduli of continuity. Refs 5.

Keywords: modulus of continuity, interpolation in the mean.

References

1. Kryakin Yu., *Whitney's theorem for oscillating on* $\mathbb{R}$ *functions*. arXiv: math/0612442v1, 2006.

2. Vinogradov O. L., Zhuk V. V., "Sharp estimates for the deviation of the mean value of a periodic function in terms of moduli of continuity of higher order", *Journal of Mathematical Sciences* **106**(3), 2901–2918 (2001).

3. Demidovich B. P., *Problems in mathematical analysis* (GIFML, Moscow, 1963) [in Russian].

4. Riordan J., *Combinatorial identities* (Nauka, Moscow, 1982) [in Russian].

5. Zhuk V. V., Natanson G. I., "To the theory of cubic periodic splines with equidistant nodes", *Vestnik Leningr. Univ. Ser. 1* (1), Issue 1, 5–11 (1984) [in Russian].