УДК 519.71 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 1

ПОВЕДЕНИЕ КОНЕЧНО-НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ АВТОМАТОВ В НЕЧЕТКОЙ СРЕДЕ*

А. Ю. Пономарёва

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

В работе предложен метод поиска оптимального управления обобщенным детерминированным абстрактным автоматом, структура которого задается произвольным конечным графом, функционирующим в нечетко заданной среде. Управление находится для достижения нечеткой цели, заданной в виде нечеткого множества в любой фиксированной конечной вершине структурного графа автомата. Решение задачи разбивается на два этапа, первый из которых дает максимально возможную степень достижения нечеткой цели в зависимости от пути из начальной вершины графа в фиксированную, а второй — позволяет построить множество входных слов, обеспечивающих достижение этой цели на выбранном пути. В заключение работы дан пример применения предложенного метода построения регулярного выражения управляющих последовательностей к заданному абстрактному конечно-нестационарному детерминированному автомату. Библиогр. 5 назв. Ил. 2.

Ключевые слова: конечно-нестационарный обобщенный абстрактный детерминированный автомат, оптимальное управление, нечетко заданная среда, нечеткая цель.

1. Введение. В данной работе рассматривается автоматная математическая модель систем и процессов, структура которой задается в виде произвольного конечного графа, а каждому ребру этого графа сопоставлен стационарный автомат из множества автоматов конкретного типа, которым определяется тип самой автоматной модели. Для предложенной детерминированной модели решается задача оптимального поведения в зависимости от нечетко заданных условий и нечетких целей. В работе [1] для решения этой задачи был разработан метод автоматных итераций применительно к другой модели — периодически нестационарным автоматам разных типов. Структура автомата, к которому применимы методы работы [1], изображена на рис. 1 в конце раздела 2. Рассматриваемая в данной статье конечно-нестационарная модель [2] существенно более сложна по структуре, чем периодически нестационарная, и целью исследования является обобщение предложенной в работе [1] методики на случай детерминированного конечно-нестационарного абстрактного автомата.

2. Конечно-нестационарные автоматные модели. Определим исследуемую в работе модель — *конечно-нестационарный обобщенный автомат* с произвольной структурой, задаваемой конечным графом. Автомат функционирует в дискретные моменты времени — такты. Все элементы структуры такой модели меняются от такта к такту в зависимости от того, какой путь из начальной фиксированной вершины графа будет пройден автоматом вдоль своих ребер к одной из конечных вершин и какой стационарный автомат сопоставлен каждому ребру, лежащему на этом пути.

Пусть X, A, Y — алфавиты соответственно входных символов, состояний и выходных символов. Назовем *элементарной автоматной структурой* систему

$$\mathcal{A}_{ij} = \left\langle X^{(i,j)},\ A_i,\ A_j,\ Y^{(i,j)},\ \{\mathcal{F}^{(i,j)}(x_s, y_l)\} \right\rangle, \qquad (1)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00538).

где $X^{(i,j)} \subseteq X$, $A_i, A_j \subseteq A$, $|A_i| = m_i$, $|A_j| = m_j$, $Y^{(i,j)} \subseteq Y$, а $\{\mathcal{F}^{(i,j)}(x_s, y_l)\}$ есть совокупность функций переходов, определяющих работу автоматной структуры в зависимости от ее вида и соответствующих различным парам (x_s, y_l), $x_s \in X^{(i,j)}$, $y_l \in Y^{(i,j)}$ при переходе из состояний алфавита A_i в состояния алфавита A_j.

Таким образом, каждая такая элементарная структура фактически является однотактным стационарным конечным автоматом со своими входным и выходным алфавитами, алфавитами состояний и функциями, определяющими его работу.

Пусть задано конечное множество элементарных автоматных структур $\mathcal{A}$ вида (1) и Q — конечное множество финальных вектор-столбцов весов состояний.

Обобщенным конечно-нестационарным автоматом назовем систему

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \left\langle X,\ \mathcal{A},\ Y,\ \mathbf{r}_0,\ \mathcal{G}\left(G, C, \widetilde{C}, c_0, H, \Psi\right),\ Q\right\rangle, \tag{2}$$

где $\mathcal{G}$ — *структурный граф автомата* (конечный, ориентированный, нагруженный граф), имеющий:

— конечное множество вершин $C = \{c_0, c_1, \dots, c_{d-1}\}$, каждой вершине c_i, $i = \overline{0, d-1}$, сопоставлен алфавит состояний A_i, $i = \overline{0, d-1}$, $\bigcup_i A_i = A$, $|A_i| = m_i$;

— *начальную вершину* c_0, для которой задан $\mathbf{r}_0$ — вектор допустимых начальных распределений весов состояний размерности m_0;

— $\widetilde{C} \subseteq C$ — подмножество финальных вершин;

— конечное множество G направленных ребер, где $g_{ij} \in G$ — ребро, соединяющее вершины c_i и c_j;

— однозначную функцию $H : G \longrightarrow \mathcal{A}$, $H(g_{ij}) = \mathcal{A}_{ij}$, $\mathcal{A}_{ij} \in \mathcal{A}$, причем $\bigcup_{g_{ij} \in G} X^{(i,j)} = X, \bigcup_{g_{ij} \in G} Y^{(i,j)} = Y$;

— однозначную функцию $\Psi : \widetilde{C} \longrightarrow Q$, $\Psi(c_i) = \mathbf{q}^{(i)}$, $\mathbf{q}^{(i)} \in Q$.

Граф такого автомата имеет произвольный вид (см., например, рис. 2 в разделе 11 этой статьи) в отличие от графа рассмотренной в работе [1] периодически нестационарной модели, который представлен на рис. 1. Из чего становится очевидно, что исследованный периодически нестационарный автомат является частным случаем предложенной модели конечно-нестационарного типа.

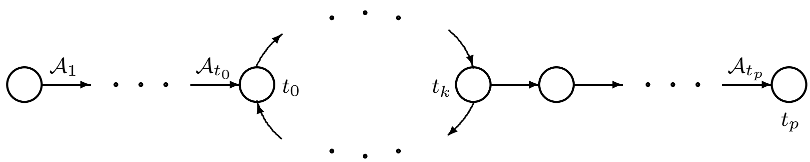

Рис. 1

Как видно из графа, все пути, ведущие из начальной вершины данного автомата в какую-либо фиксированную конечную, отличаются друг от друга лишь количеством обходов вершин периодической части автомата, если конечная вершина расположена не в предпериоде. При этом они проходят через одни и те же вершины графа в одинаковом порядке. Именно для таких путей в работе [1] и разработан метод автоматных итераций.

3. Нечеткие множества и операции над ними. Пусть X — некоторое множество элементов. *Нечетким множеством A в X* [3, 4] называется совокупность пар вида $(x, \mu_A(x))$, где $x \in X$, а $\mu_A(x)$ есть значение функции $\mu_A : X \to [0, 1]$, называемой *функцией принадлежности* нечеткого множества A. Значение $\mu_A(x)$ для конкретного x называется *степенью принадлежности* этого элемента нечеткому множеству A. При известном X эта функция может быть использована для задания нечеткого множества.

Пусть A и B суть нечеткие множества в X, их *объединением* называют нечеткое множество $C = A \cup B$ с функцией принадлежности $\mu_C(x) = \mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$, $x \in X$.

4. Нечеткие матрицы и операции над ними. Пусть X, Y, Z — непустые конечные упорядоченные множества (алфавиты) и $|X| = n_x$, $|Y| = n_y$, $|Z| = n_z$. *Нечетким бинарным отношением* R, заданным на множествах X и Y, называют фиксированное нечеткое множество в декартовом произведении $X \times Y$, характеризующееся функцией принадлежности $\mu_R : X \times Y \to [0, 1]$. Нечеткое бинарное отношение R удобно задавать в виде *нечеткой* $(n_x \times n_y)$*-матрицы* $\mathbf{R} = (R_{ij})_{n_x}^{n_y}$, где $R_{ij} = \mu_R(x_i, y_j)$, $x_i \in X$, $y_j \in Y$, а значение $\mu_R(x_i, y_j) \in [0, 1]$ является *степенью выполнения отношения* $x_i R y_j$. Тогда операции над нечеткими отношениями сводятся к операциям над нечеткими матрицами.

Пусть $\mathbf{R}^{(1)}$ и $\mathbf{R}^{(2)}$ суть две нечеткие $(n_x \times n_y)$-матрицы в $X \times Y$. Тогда *объединение* нечетких матриц $\mathbf{R}^{(1)}$ и $\mathbf{R}^{(2)}$ — это нечеткая $(n_x \times n_y)$-матрица $\mathbf{R} = \mathbf{R}^{(1)} \cup \mathbf{R}^{(2)}$ с элементами

$$\mu_{\mathbf{R}}(x_i, y_j) = \max\left\{\mu_{\mathbf{R}^{(1)}}(x_i, y_j), \mu_{\mathbf{R}^{(2)}}(x_i, y_j)\right\}, \ x_i \in X, \ y_j \in Y.$$

Пусть заданы нечеткие матрицы: $(n_x \times n_y)$-матрица $\mathbf{R}^{(1)}$ и $(n_y \times n_z)$-матрица $\mathbf{R}^{(2)}$. *Произведением нечеткой матрицы* $\boldsymbol{R}^{(1)}$ *и нечеткой матрицы* $\boldsymbol{R}^{(2)}$ назовем нечеткую $(n_x \times n_z)$-матрицу $\mathbf{R} = \mathbf{R}^{(1)} \circ \mathbf{R}^{(2)}$, элементами которой являются значения функции принадлежности

$$\mu_{\mathbf{R}}(x_i, z_j) = \max_{y}\left\{\min\left\{\mu_{\mathbf{R}^{(1)}}(x_i, y), \mu_{\mathbf{R}^{(2)}}(y, z_j)\right\}\right\}, \ x_i \in X, \ y \in Y, \ z_j \in Z.$$

5. Конечно-нестационарные автоматы различных типов. Обозначим множество $(m \times n)$-матриц с элементами из $\{0, 1\}$ как $\mathcal{D}^{m,n}$ и множество $(m \times n)$-матриц с элементами из [0,1] как $\mathcal{R}^{m,n}$. Если в заданном обобщенном конечно-нестационарном автомате $\widetilde{\mathcal{A}}$ (2) все автоматные структуры из множества $\mathcal{A}$ имеют функции переходов одного и того же типа, то автомат $\widetilde{\mathcal{A}}$ определяется следующим образом.

- $$\left\{\mathcal{F}^{(i,j)}(x_s, y_l)\right\} = \left(f^{(i,j)}, \varphi^{(i,j)}\right), \quad \mathbf{r}_0 = (1\ 0 \ldots 0), \tag{3}$$

  где $(f^{(i,j)}, \varphi^{(i,j)})$ — соответственно однозначные функции переходов из состояний алфавита A_i в состояния алфавита A_j и выходов (выдачи букв выходного алфавита $Y^{(i,j)}$) автомата (1), сопоставленного ребру графа g_{ij}. Тогда это *конечно-нестационарный детерминированный автомат* $\widetilde{\mathcal{A}}_{det}$, а первая компонента в векторе $\mathbf{r}_0$ соответствует начальному состоянию.

- $$\left\{\mathcal{F}^{(i,j)}(x_s, y_l)\right\} = \left\{\mathbf{D}^{(i,j)}(x_s, y_l)\right\}, \quad \mathbf{r}_0 \in \mathcal{D}^{1,m_0}, \tag{4}$$

  где $\{\mathbf{D}^{(i,j)}(x_s, y_l)\}$ — совокупность $(m_i \times m_j)$-матриц переходов с элементами из $\{0, 1\}$ автомата (1), сопоставленного ребру графа g_{ij}. Элементы «1» в строке с номером ρ матрицы переходов указывают, в какие состояния алфавита A_j переходит автомат из состояния $a_\rho \in A_i$, если $x_s \in X^{(i,j)}$ и $y_l \in Y^{(i,j)}$. Тогда это *конечно-нестационарный недетерминированный автомат* $\widetilde{\mathcal{A}}_{nd}$ с вектором начальных состояний $\mathbf{r}_0$.

- $$\left\{\mathcal{F}^{(i,j)}(x_s, y_l)\right\} = \left\{\mathbf{F}^{(i,j)}(x_s, y_l)\right\}, \quad \mathbf{r}_0 \in \mathcal{R}^{1,m_0}, \tag{5}$$

  где $\{\mathbf{F}^{(i,j)}(x_s, y_l)\}$ — совокупность нечетких $(m_i \times m_j)$-матриц степеней принадлежности множеству переходов автомата (1), сопоставленного ребру графа g_{ij}. Элементы строки с номером ρ матрицы переходов являются степенями принадлежности, с которыми автомат переходит из состояния $a_\rho \in A_i$ в состояния из алфавита A_j, если $x_s \in X^{(i,j)}$ и $y_l \in Y^{(i,j)}$. Тогда это *конечно-нестационарный нечеткий автомат* $\widetilde{\mathcal{A}}_f$ с вектором степеней принадлежности состояний множеству начальных состояний $\mathbf{r}_0$.

Если в определениях автоматов (3), (4) и (5) убрать из каждой автоматной структуры $\mathcal{A}_{ij} \in \mathcal{A}$ алфавит $Y^{(i,j)}$, в автомате (3) — функцию выходов $\varphi^{(i,j)}$, а в матрицах $\{\mathbf{D}^{(i,j)}(x_s, y_l)\}$ и $\{\mathbf{F}^{(i,j)}(x_s, y_l)\}$ символы y_l, то можно рассматривать алфавиты состояний $\mathcal{A}_j$ в качестве выходных алфавитов в каждой вершине c_j графа $\mathcal{G}$. Такие автоматы называются *абстрактными автоматами* $\widetilde{\mathcal{A}}_{det}$, $\widetilde{\mathcal{A}}_{nd}$ и $\widetilde{\mathcal{A}}_f$.

6. Нечеткая среда. Пусть задан детерминированный конечно-нестационарный абстрактный автомат $\widetilde{\mathcal{A}}_{det}$ (3). Выделим в структурном графе какую-либо вершину $c_j \in C$. Рассмотрим один из путей Ω_{0j}, ведущий из начальной вершины c_0 в вершину c_j графа, проходящий через вершины $c_{i_0} = c_0, c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_t} = c_j$, и выпишем последовательность элементарных автоматных структур, отмечающих ребра, образующие этот путь: $\mathcal{A}_{i_0 i_1}, \mathcal{A}_{i_1 i_2}, \ldots, \mathcal{A}_{i_{t-1} i_t}$. Рассмотрим любое слово w, $w = x_{s_1} x_{s_2} \ldots x_{s_t}$, $x_{s_\nu} \in X^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}$, $\nu = \overline{1,t}$, в алфавите X. Пусть $|X^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}| = n_{i_{\nu-1}, i_\nu}$. Множество всех таких слов назовем *множеством допустимых слов для пути* Ω_{0j} и обозначим $Z_{\mathrm{acc}}(\Omega_{0j})$, при этом будем считать, что пустое слово $e \in Z_{\mathrm{acc}}(\Omega_{00})$.

Пусть автомат $\widetilde{\mathcal{A}}_{det}$ (3) находится во взаимодействии с некоторой средой

$$\mathcal{P} = \left\langle \mathbb{P}^i,\ i = \overline{0, d-1} \right\rangle, \tag{6}$$

где $\mathbb{P}^i = \{(\mathbf{P}^{i_\nu}_{i_{\nu-1}}(x_{s_\nu}))\}$, $i_\nu = i$, есть $(n_{i_{\nu-1}, i_\nu})$-векторы, задающие нечеткие ограничения, которые устанавливаются средой на входные символы $x_{s_\nu} \in X^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}$ автомата в вершине $c_{i_\nu} = c_i$ в зависимости от предыдущей вершины $c_{i_{\nu-1}}$ для любого пути, содержащего ребро $g_{i_{\nu-1}, i_\nu}$, $i_\nu = i$. Каждый такой вектор задает нечеткое множество в $X^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}$, определяющее значения функции принадлежности $\mu^{i_\nu}_{i_{\nu-1}}(x_{s_\nu})$, $x_{s_\nu} \in X^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}$, $i_{\nu-1}, i_\nu \in \{0, \ldots, d-1\}$, которые лежат в интервале [0, 1].

Таким образом, проходя по каждому пути в графе, автомат переходит в любое состояние из $A_{i_{\nu-1}}$ в вершине $c_{i_{\nu-1}}$, воздействующее на среду $\mathcal{P}$, которая накладывает нечеткие ограничения $\mathbf{P}^{i_\nu}_{i_{\nu-1}}(x_{s_\nu})$ на входные управляющие символы $x_{s_\nu} \in X^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}$ автоматной структуры следующего ребра пути.

7. Нечеткая цель и оптимальное поведение. Пусть $V^{(N)}$ есть множество альтернатив конечно-нестационарного автомата $\widetilde{\mathcal{A}}$ (2) (в случае абстрактного автомата будем принимать за $V^{(N)}$ алфавит состояний A_N) в вершине $c_N \in C$.

Нечеткой целью функционирования конечно-нестационарного автомата $\widetilde{\mathcal{A}}$ (2) в вершине c_N назовем нечеткое множество Σ^N множества $V^{(N)}$, описываемое функцией принадлежности $\mu_{\Sigma^N} : V^{(N)} \to [0,1]$.

Рассмотрим нечеткую цель Σ^N, заданную в вершине c_N, и обозначим $w = x_{s_1}x_{s_2}\ldots x_{s_t}$, где $x_{s_t} \in X^{(i_{\nu-1},i_\nu)}$, входное слово $w \in Z_{\text{acc}}(\Omega_{0N})$. Результатом воздействия слова w, с учетом заданных в вершинах графа нечетких ограничений среды (6), будет некоторое множество $\widetilde{\Sigma}^N(w)$ во множестве альтернатив $V^{(N)}$ такое, что $\widetilde{\Sigma}^N(w) \subseteq \Sigma^N$. Тогда входное слово (управляющая последовательность) w обеспечивает *оптимальное поведение* автомата $\widetilde{\mathcal{A}}$ в вершине $c_N \in C$, если для любого входного слова $w' = x_{g_1}x_{g_2}\ldots x_{g_t}$, $w' \in Z_{\text{acc}}(\Omega_{0N})$, $\widetilde{\Sigma}^N(w') \subseteq \Sigma^N$ и

$$\max[\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{\Sigma}^N}(w')] \leqslant \max[\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{\Sigma}^N}(w)],$$

где $\max[\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{\Sigma}^N}(w')]$ и $\max[\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{\Sigma}^N}(w)]$ — максимальные элементы векторов $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{\Sigma}^N}(w')$ и $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{\Sigma}^N}(w)$.

Множество $\mathcal{Z}_{\max}$ всех входных слов, обеспечивающих оптимальное поведение конечно-нестационарной автоматной модели $\widetilde{\mathcal{A}}$ в вершине $c_N \in C$ для пути Ω_{0N}, условимся называть *множеством оптимальных входных управлений моделью для пути* Ω_{0N} (иначе, *оптимальным входным языком*).

8. Формулировка задачи. В работе будет решена следующая задача. Задан конечно-нестационарный детерминированный абстрактный автомат $\widetilde{\mathcal{A}}_{det}$ (3), структура которого задается графом $\mathcal{G}$. При этом в каждой вершине графа $c_i \in C$ на входные символы накладываются нечеткие ограничения $\mathbb{P}^i$ (6). Пусть в вершине c_N задана нечеткая цель — нечеткое множество Σ^N. Обозначим через $\widetilde{\Omega}_{0N}$ множество всех путей из вершины c_0 в вершину c_N. Требуется найти множество $\mathcal{Z}_{\max}$ оптимальных входных управлений автоматом $\widetilde{\mathcal{A}}_{det}$ для любого пути $\Omega_{0N} \in \widetilde{\Omega}_{0N}$. Будем считать, что рассматриваемые пути Ω_{0N} содержат вершину c_N только в качестве конечной.

9. Метод автоматных итераций. В работе [1] был предложен метод автоматных итераций для поиска оптимального управления периодически нестационарным детерминированным автоматом и поиска максимально возможной степени достижения заранее заданной нечеткой цели. Метод основан на преобразовании автоматных матриц в нечеткие с учетом заданных в каждом такте ограничений и последующим нахождением регулярного выражения управляющих воздействий — решения задачи для исходного автомата.

Как видно из рис. 1 и комментария после него (см. раздел 2), все пути, ведущие из начальной вершины периодически нестационарного автомата в какую-либо заданную, отличаются только наличием или отсутствием периодической составляющей, проходящей через вершины, образующие периодическую часть автомата. Особенность конечно-нестационарной модели заключается в том, что такой автомат может иметь большое, хоть и конечное, множество существенно различных путей, ведущих к вершине с заданной нечеткой целью и проходящих через произвольные вершины графа (см., например, рис. 2 в разделе 11). Поэтому в данном автомате не представляется возможным найти оптимальное управляющее воздействие в виде регулярных выражений для всех путей, ведущих из начальной вершины в вершину с заданной нечеткой целью, избежав полного перебора путей. Но, используя известные алгоритмы из теории графов, например поиск в ширину или высоту [5], можно найти, скажем, кратчайший путь из начальной в рассматриваемую вершину и искать оптимальное управляющее воздействие для него.

Приведем интерпретацию метода автоматных итераций для абстрактного нечеткого конечно-нестационарного автомата $\widetilde{\mathcal{A}}_f$ (5), осуществляющего поиск управляющего воздействия на пути из начальной в выделенную вершину структурного графа. Предложенный метод позволяет определить максимальную степень достижения нечеткой цели в заданной вершине графа и выделить множество ребер, через которые может проходить любой путь, дающий достижение заданной цели с максимальной степенью достижения. Таким образом, будет решена более сложная задача, чем та, что сформулирована в разделе 8.

Пусть в графе $\mathcal{G}$ известна вершина $c_N \in C$, в которой задана нечеткая цель Σ^N. Обозначим за $\Omega_{0N}^{\max}$ множество всех путей, дающих достижение нечеткой цели с максимальной степенью достижения. Рассмотрим путь $\Omega_{0N} \in \Omega_{0N}^{\max}$, проходящий через вершины $c_{i_1} = c_0, \ldots, c_{i_t} = c_N$, и последовательность автоматных структур $\mathcal{A}_{i_0 i_1}, \mathcal{A}_{i_1 i_2}, \ldots, \mathcal{A}_{i_{t-1} i_t}$, отмечающих ребра этого пути. Необходимо найти регулярное выражение множества входных слов $\mathcal{Z}_{\max} \subseteq Z_{\text{acc}}(\Omega_{0N})$, приводящих к максимально возможному значению достижения нечеткой цели $\Sigma_N = \mathbf{q}^{(N)}$, т. е. такое, при котором слово $w_{opt} \in \mathcal{Z}_{\max}$ тогда и только тогда, когда

$$\Phi_f(w_{opt}) = \max_{w \in Z_{\text{acc}}(\Omega_{0N})} \left(\mathbf{r}_0 \prod_{\nu=1}^{t} \mathbf{F}^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}(x_{s_\nu}) \mathbf{q}^{(N)} \right). \tag{7}$$

Разделим решение поставленной задачи на 2 этапа:

1) нахождение максимально возможной степени достижения цели $\Sigma^N = \mathbf{q}^{(N)}$ и определение множества ребер, через котрые проходят пути, обеспечивающие достижение цели с этой степенью;

2) поиск множества входных слов $\mathcal{Z}_{\max}$ для любого пути из множества $\Omega_{0N}^{\max}$, обеспечивающих достижение этой цели.

Для обоснования обоих этапов докажем соответствующие утверждения.

Теорема 1. *Для заданного абстрактного нечеткого конечно-нестационарного автомата $\widetilde{\mathcal{A}}_f$ (5) для каждой $c_N \in C$ вершины графа $\mathcal{G}$ и для любого $\Omega_{0N} \in \widetilde{\Omega}_{0N}$, проходящего через вершины $c_{i_0} = c_0, c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_t} = c_N$, существует $w_{opt} = x_{s_1} x_{s_2} \ldots x_{s_t} \in Z_{\text{acc}}(\Omega_{0N})$ такое, что условие (7) выполняется в том и только том случае, если $\mu_{\max}^{(N)} = \mathbf{r}_0 \mathbf{q}^{(0)} > 0$, где $\mathbf{q}^{(0)}$ находится из рекуррентного соотношения*

$$\mathbf{q}^{(i_{t-\nu-1})} = \mathbf{F}^{(i_{t-\nu-1}, i_{t-\nu})} \mathbf{q}^{(i_{t-\nu})}, \quad \nu = \overline{0, t-1}, \tag{8}$$

где $\mathbf{F}^{(i_{\nu-1}, i_\nu)} = \bigcup\limits_{x_s \in X^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}} \mathbf{F}^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}(x_s)$.

Доказательство. С учетом определения объединения нечетких матриц имеем

$$F_{ij}^{(i_{\nu-1}, i_\nu)} = \bigcup_{x_s \in X^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}} F_{ij}^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}(x_s) = \max_{x_s \in X^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}} F_{ij}^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}(x_s).$$

Если $w = x_{s_1} \ldots x_{s_t}$, где $x_{s_\nu} \in X^{(i_{\nu-1}, i_\nu)}$, зная, что $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{q}^{(i_t)} = \mathbf{q}^{(N)}$ не зависят от

$w \in Z_{\rm acc}(\Omega_{0N})$, (7) можно записать таким образом:

$$\mu_{\max}^{(N)} = \max_{x_{s_1}\dots x_{s_t}} \left(\mathbf{r}_0 \prod_{\nu=1}^{t} \mathbf{F}^{(i_{\nu-1},i_\nu)}(x_{s_\nu})\mathbf{q}^{(i_t)} \right) =$$

$$= \max_{x_{s_1}\dots x_{s_{t-1}}} \left(\mathbf{r}_0 \prod_{\nu=1}^{t-1} \mathbf{F}^{(i_{\nu-1},i_\nu)}(x_{s_\nu}) \left[\max_{x_{s_t}} \mathbf{F}^{(i_{t-1},i_t)}(x_{s_t})\mathbf{q}^{(i_t)} \right] \right) =$$

$$= \max_{x_{s_1}\dots x_{s_{t-1}}} \left(\mathbf{r}_0 \prod_{\nu=1}^{t-1} \mathbf{F}^{(i_{\nu-1},i_\nu)}(x_{s_\nu})\mathbf{q}^{(i_{t-1})} \right), \text{ где } \mathbf{q}^{(i_{t-1})} = \max_{x_{s_t}} \left[\mathbf{F}^{(i_{t-1},i_t)}(x_{s_t})\mathbf{q}^{(i_t)} \right].$$

Продолжая дальше этот процесс, находя максимумы для слов на единицу меньшей длины, получаем (8) и

$$\mu_{\max}^{(N)} = \mathbf{r}_0\mathbf{q}^{(i_0)} = \mathbf{r}_0\mathbf{q}^{(0)}.$$

Из этого соотношения очевидно, что для того, чтобы $\mu_{\max}^{(N)} > 0$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое $a_\rho \in A_0$, что $r_0(a_\rho) \geqslant \mu_{\max}^{(N)} > 0$, $q^{(0)}(a_\rho) \geqslant \mu_{\max}^{(N)} > 0$ и $r_0(a_\rho)q^{(0)}(a_\rho) = \mu_{\max}^{(N)}$. Условие $q^{(0)}(a_\rho) > 0$ означает, что в матрицах $\mathbf{F}^{(i_{\nu-1},i_\nu)}$, $\nu = \overline{1,t}$, есть последовательность переходов (ненулевых элементов) из $a_\rho \in A_0$ в некоторое состояние $a_\xi \in A_N$, для которого $q^{(N)}(a_\xi) \geqslant \mu_{\max}^{(N)}$, а из этого следует, что существует входное слово w_{opt}, которое эти переходы осуществляет, т. е. $\mathcal{Z}_{\max} \neq \Lambda$, где Λ — язык, не содержащий ни одного слова. Теорема доказана.

Замечание. Для использования рекуррентного соотношения (8) необходимо рассмотреть все пути, ведущие из вершины c_0 в c_N, и все вершины c_{i_ν}, лежащие на этих путях, найти $\mathbf{q}^{(i_\nu)}$ — максимальные степени достижения цели в этих вершинах, которые зависят от выбранного пути. Поэтому необходимо знать, на каких ребрах, идущих из вершины c_{i_ν}, достигается максимум вектора $\mathbf{q}^{(i_\nu)}$. Учитывая, что компоненты вектора $\mathbf{q}^{(i_\nu)}$ могут не быть одинаковыми, нужно запоминать векторы с максимальными значениями по каждой из компонент, поскольку при дальнейшем использовании соотношения (8) для нахождения $\mathbf{q}^{(i_{\nu-1})}$ может оказаться, что $\max[\mathbf{q}^{(i_{\nu-1})}] < \max[\mathbf{q}'^{(i_{\nu-1})}]$, несмотря на то что $\max[\mathbf{q}^{(i_\nu)}] > \max[\mathbf{q}'^{(i_\nu)}]$ при вычислении $\mathbf{q}^{(i_{\nu-1})} = \mathbf{F}^{(i_{\nu-1},i_\nu)}\mathbf{q}^{(i_\nu)}$ и $\mathbf{q}'^{(i_{\nu-1})} = \mathbf{F}^{(i_{\nu-1},i_\nu)}\mathbf{q}'^{(i_\nu)}$. Тогда найденное в итоге $\mu_{\max}^{(N)}$ может быть не максимальным значением.

Теперь перейдем к построению регулярного выражения языка $\mathcal{Z}_{\max}$. Рассмотрим недетерминированный конечно-нестационарный абстрактный автомат $\widetilde{\mathcal{A}}_{nd}$ (4), у которого множество входных слов $Z \subseteq Z_{\rm acc}(\Omega_{0N})$ представлено в автомате $\widetilde{\mathcal{A}}_{nd}$, если ребра, образующие путь Ω_{0N}, отмечены последовательностью элементарных автоматных структур $\mathcal{A}_{i_0 i_1}, \mathcal{A}_{i_1 i_2}, \dots, \mathcal{A}_{i_{t-1} i_t}$ и слово $w = x_{s_1}\dots x_{s_t} \in Z$ тогда и только тогда, когда

$$\Phi_{nd}(w) = \widehat{\mathbf{r}}_0 \prod_{\nu=1}^{t} \mathbf{D}^{(i_{\nu-1},i_\nu)}(x_{s_\nu})\widehat{\mathbf{q}}^{(N)} = 1, \tag{9}$$

где $\widehat{\mathbf{r}}_0$ и $\widehat{\mathbf{q}}^{(N)}$ — векторы начальных и финальных состояний автомата $\widetilde{\mathcal{A}}_{nd}$. Автоматные матрицы автомата $\widetilde{\mathcal{A}}_{nd}$ определяются так:

$$\widehat{\mathbf{U}}^{(i,j)} = \bigcup_{x_s \in X^{(i,j)}} \mathbf{D}^{(i,j)}(x_s)x_s, \quad i,j \in \{0,\dots,d-1\}. \tag{10}$$

Теорема 2. *Если нечеткий конечно-нестационарный абстрактный автомат* $\widetilde{\mathcal{A}}_f$ (5) *удовлетворяет условиям теоремы 1* ($\mathcal{Z}_{\max} \neq \Lambda$) *и* $\mu_{\max}^{(N)} > 0$, *и недетерминированный конечно-нестационарный абстрактный автомат* $\widetilde{\mathcal{A}}_{nd}$ (4) *получен из автомата* $\widetilde{\mathcal{A}}_f$ *заменой элементов векторов* $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{q}^{(N)}$ *и матриц* $\{\mathbf{F}^{(i,j)}(x_s)\}$, *которые больше или равны* $\mu_{\max}^{(N)}$, *на элементы «1» и остальных элементов — на «0», множество входных слов* $\mathcal{Z}_{\max}$ *для пути* $\Omega_{0N} \in \widetilde{\Omega}_{0N}$, *проходящего через вершины* $c_{i_0} = c_0, c_{i_1}, \ldots, c_{i_t} = c_N$, *представлено в автомате* $\widetilde{\mathcal{A}}_{nd}$, *причем его регулярное выражение имеет вид*

$$Z_{\max}(\Omega_{0N}) = \widehat{\mathbf{r}}_0 \prod_{\nu=1}^{t} \widehat{\mathbf{U}}^{(i_{\nu-1},i_\nu)} \widehat{\mathbf{q}}^{(N)}, \tag{11}$$

где под операциями «сложения» и «умножения» понимаются операции объединения и произведения в алгебре регулярных языков.

Доказательство. Учитывая, что автомат $\widetilde{\mathcal{A}}_f$ (5) удовлетворяет условиям теоремы 1, для каждого слова $w = x_{s_1} x_{s_2} \ldots x_{s_N} \in Z_{\mathrm{acc}}(\Omega_{0N})$, $x_{s_\nu} \in X^{(i_{\nu-1},i_\nu)}$, $\nu = \overline{1,t}$, верно

$$\Phi_f(w) = \mathbf{r}_0 \prod_{\nu=1}^{t} \mathbf{F}^{(i_{\nu-1},i_\nu)}(x_{s_\nu}) \mathbf{q}^{(N)} = \begin{cases} \mu_{\max}^{(N)} & \text{при} \quad w = w_{opt} \in \mathcal{Z}_{\max}, \\ \mu < \mu_{\max}^{(N)} & \text{при} \quad w \notin \mathcal{Z}_{\max}. \end{cases}$$

Тогда для недетерминированного автомата $\widetilde{\mathcal{A}}_{nd}$ (4), полученного из $\widetilde{\mathcal{A}}_f$ описанным в формулировке теоремы преобразованием, с учетом (9) для слова w верно

$$\Phi_{nd}(w) = \widehat{\mathbf{r}}_0 \prod_{\nu=1}^{t} \mathbf{D}^{(i_{\nu-1},i_\nu)}(x_{s_\nu}) \widehat{\mathbf{q}}^{(N)} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad w = w_{opt} \in \mathcal{Z}_{\max}, \\ 0 & \text{при} \quad w \notin \mathcal{Z}_{\max}, \end{cases}$$

т. е. язык $\mathcal{Z}_{\max}$ представлен в построенном автомате $\widetilde{\mathcal{A}}_{nd}$.

Справедливость (11) очевидна исходя из (10), так как непустые (ненулевые) элементы $\widehat{U}_{kl}^{(i_{\nu-1},i_\nu)}$ автоматной матрицы $\widehat{\mathbf{U}}^{(i_{\nu-1},i_\nu)} = \big(\widehat{U}_{kl}^{(i_{\nu-1},i_\nu)}\big)$, $k = \overline{1, m_{i_{\nu-1}}}$, $l = \overline{1, m_{i_\nu}}$, представляют собой дизъюнкции тех входных слов алфавита $X^{(i_{\nu-1},i_\nu)}$, которые осуществляют переход из состояния $a_k \in A_{i_{\nu-1}}$ в состояние $a_l \in A_{i_\nu}$. Тогда (11) дает регулярное выражение множества слов $\mathcal{Z}_{\max} \subseteq Z_{\mathrm{acc}}(\Omega_{0N})$. Теорема доказана.

10. Алгоритм реализации метода автоматных итераций. Для формализации метода автоматных итераций, обоснованного для конечно-нестационарного абстрактного нечеткого автомата $\widetilde{\mathcal{A}}_f$ (5), проведем следующие преобразования для случая конечно-нестационарного детерминированного абстрактного автомата $\widetilde{\mathcal{A}}_{det}$ (3) (все шаги алгоритма проиллюстрированы примером, приведенным в разделе 11).

1. Преобразуем автомат $\widetilde{\mathcal{A}}_{det}$ в автомат $\widetilde{\mathcal{A}}_f$, заданный в матричной форме:

а) заменим заданную нечеткую цель Σ^N с функцией принадлежности $\mu_{\Sigma^N} : A_N \to [0,1]$ на вектор-столбец $\mathbf{q}^{(N)}$ степеней принадлежности состояний множеству конечных состояний в вершине c_N, $q_j^{(N)} = \mu_{\Sigma^N}(a_j), a_j \in A_N$;

б) по таблицам переходов $f^{(i,j)}$ для любого $g_{ij} \in G$ автомата $\widetilde{\mathcal{A}}_{det}$ сначала строим его матрицы переходов $\mathbf{U}^{(i,j)}(x_s) = \Big(U_{kl}^{(i,j)}(x_s)\Big)$, $k = \overline{1, m_i}$, $l = \overline{1, m_j}$, с элементами

$$U_{kl}^{(i,j)}(x_s) = \begin{cases} x_s & \text{при} \quad f^{(i,j)}(a_k, x_s) = a_l, \\ 0 & \text{при} \quad f^{(i,j)}(a_k, x_s) \neq a_l, \end{cases}$$

а затем его автоматные матрицы $\mathbf{U}^{(i,j)} = \bigcup_{x_s \in X^{(i,j)}} \mathbf{U}^{(i,j)}(x_s)$ для всех $g_{ij} \in G$;

в) с учетом заданных ограничений (6) $\mu_i(x_s), i = \overline{0, d-1}, x_s \in X^{(i,j)}$, находим «нечеткие» автоматные матрицы абстрактного автомата $\widetilde{\mathcal{A}}_f$:

$$\widetilde{\mathbf{U}}^{(i,j)} = \bigcup_{x_s \in X^{(i,j)}} \mu_i(x_s)\mathbf{U}^{(i,j)}(x_s) = \bigcup_{x_s \in X^{(i,j)}} \mathbf{F}^{(i,j)}(x_s)x_s.$$

2. Из построенных «нечетких» автоматных матриц $\widetilde{\mathbf{U}}^{(i,j)}, i = \overline{0, d-1}$, найдем матрицы максимальных весов переходов $\mathbf{F}^{(i,j)} = \left(F_{kl}^{(i,j)}\right)$, $k = \overline{1, m_i}$, $l = \overline{1, m_j}$, следующим образом:

а) удалим из матриц $\widetilde{\mathbf{U}}^{(i,j)}$ все буквы алфавитов $X^{(i,j)}$;

б) из каждого полученного объединения $\bigcup_{x_s \in X^{(i,j)}} \mathbf{F}^{(i,j)}(x_s)$ весов переходов выберем максимальный элемент, а остальные элементы удалим, в результате получим $F_{kl}^{(i,j)} = \max_{x_s \in X^{(i,j)}} F_{kl}^{(i,j)}(x_s)$, $i, j \in \{0, \ldots, d-1\}$.

3. Для поиска максимально возможной степени достижения нечеткой цели Σ^N выполняем следующие шаги:

а) Строим в вершине $c_i \in C$ множество векторов достижения цели с максимальными значениями по каждой из компонент (см. замечание в разделе 9). Для этого обозначим через $\mathbf{q}_{(i,\rho)}^{(i)}(\{a_\delta\})$, где $\{a_\delta\} \subseteq A_i$ (в том числе $\{a_\delta\}$ может быть пустым), вектор достижения цели в вершине c_i, при условии, что его элементы являются максимальными на состояниях из множества $\{a_\delta\}$ и получены для путей, выходящих из вершины c_i по ребру $g_{i\rho}$. Тогда каждой вершине c_i будет сопоставляться множество $\{\max \mathbf{q}^{(i)}(\{a_\delta\})\}$, состоящее из векторов $\mathbf{q}_{(i,\rho)}^{(i)}(\{a_\delta\})$, $\{a_\delta\} \subseteq A_i$, $\bigcup \{a_\delta\} = A_i$. В начальный момент времени считаем, что $\{\max \mathbf{q}^{(i)}(\{A_i\})\} = \{(0, \ldots, 0)_{m_i}\}$, $i \neq N$, и $\{\max \mathbf{q}^{(N)}(\{A_N\})\} = \{\mathbf{q}^{(N)}\}$. Рассматриваем вершину c_i и все ребра $g_{ji} \in G$ (на первом шаге это будут вершина c_N и ребра $g_{jN} \in G$). Вычисляем $\mathbf{q}_{(j,i)}^{(j)} = \mathbf{F}^{(j,i)}\mathbf{q}_{(i,\rho)}^{(i)}(\{a_i\})$ для всех $\mathbf{q}_{(i,\rho)}^{(i)}(\{a_i\}) \in \{\max \mathbf{q}^{(i)}(\{a_\delta\})\}$ таких, что $\{a_i\} \neq \emptyset$. Если у полученного вектора есть компоненты, которые являются максимальными из соответствующих компонент всех векторов множества $\{\max \mathbf{q}^{(j)}(\{a_\delta\})\}$, то в данную совокупность добавляется полученный вектор $\mathbf{q}_{(j,i)}^{(j)}(\{a_\delta\})$, где $\{a_\delta\}$ — подмножество состояний, соответствующих максимальным компонентам. Если же каждая компонента полученного вектора меньше соответствующей компоненты какого-либо вектора из множества $\{\max \mathbf{q}^{(j)}(\{a_\delta\})\}$, то вектор добавляется в совокупность с пометкой $\{\emptyset\}$. Повторяем эти действия до тех пор, пока не перестанут изменяться множества $\{\max \mathbf{q}^{(i)}(\{a_\delta\})\}$ для всех $c_i \in C$. Процесс поиска этих множеств конечен, поскольку во всех матрицах автомата $\widetilde{\mathcal{A}}_f$ есть только конечное число различных значений из интервала $[0, 1]$, значит, конечно и число различных искомых векторов.

б) Рассматриваем вершину c_0, множество $\{\max \mathbf{q}^{(0)}\} = \{\mathbf{q}_{(0,i)}^{(0)}\}$ содержит однокомпонентные векторы, поскольку a_0 — единственное начальное состояние в автомате. Выбираем максимальные из них, значение этих векторов и есть максимальная степень достижения заданной цели $\mu_{\max}^N$ и достигается она на всех путях Ω_{0N}, начинающихся с ребра g_{0i}. После этого во всех построенных множествах $\{\max \mathbf{q}^{(j)}(\{a_\delta\})\}$ для каждой вершины c_j, $j = \overline{0, d-1}$, можно удалить такие векторы, каждая компонента которых меньше полученного $\mu_{\max}^N$, поскольку все пути, содержащие соответствующие ребра, будут давать достижение цели с меньшей степенью достижения, нежели найденная максимальная. Значит, каждый путь из множества $\Omega_{0N}^{\max}$ может проходить только через ребра, соответствующие оставшимся векторам.

4. Для определения множества слов $\mathcal{Z}_{\max}$ для пути $\Omega_{0N} \in \Omega_{0N}^{\max}$, приводящих к достижению нечеткой цели Σ^N с максимальной степенью достижения $\mu_{\max}^{(N)}$, необходимо:

а) выбрать путь $\Omega_{0N} \in \Omega_{0N}^{\max}$, который начнется с любого ребра g_{0i} такого, что $\mathbf{q}_{(0,i)}^{(0)} \in \{\max \mathbf{q}^{(0)}\}$, продолжится любым ребром g_{ij} таким, что $\mathbf{q}_{(i,j)}^{(i)} \in \{\max \mathbf{q}^{(i)}(\{a_\delta\})\}$, и так далее до достижения вершины c_N;

б) удалить из матриц $\widetilde{\mathbf{U}}^{(i_{\nu-1},i_\nu)}$, маркирующих ребра выбранного пути, входные символы с коэффициентами, меньшими чем $\mu_{\max}^{(N)}$, коэффициенты оставшихся символов считаем равными «1», таким образом получим матрицы $\widehat{\mathbf{U}}^{(i_{\nu-1},i_\nu)}, \nu = \overline{1,t}$;

в) в финальном векторе $\mathbf{q}^{(N)}$ и начальном векторе $\mathbf{r}_0$ элементы $q_j^{(N)} \geqslant \mu_{\max}^{(N)}$ и $r_{0_j} \geqslant \mu_{\max}^{(N)}$ заменить на «1», остальные — на «0», получим вектор конечных состояний $\widehat{\mathbf{q}}^{(N)}$ и начальный вектор $\widehat{\mathbf{r}}_0$;

г) выписать выражение для языка $\mathcal{Z}_{\max}(\Omega_{0N})$ по формуле (11).

11. Пример. Пусть задан обобщенный конечно-нестационарный абстрактный детерминированный автомат $\widetilde{\mathcal{A}}_{det}$ (3), граф которого представлен на рис. 2.

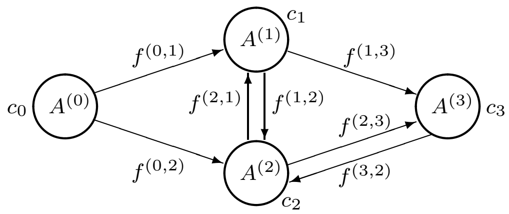

Рис. 2

Пусть $X^{(0,1)} = X^{(1,2)} = \{x_1, x_2, x_3\}$, $X^{(1,3)} = X^{(2,1)} = \{x_1, x_3\}$, $X^{(0,2)} = X^{(2,3)} = \{x_2, x_4\}$, $X^{(3,2)} = \{x_2, x_3\}$, $A_0 = \{a_0\}$, $A_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$, $A_2 = \{a_1, a_2\}$, $A_3 = \{a_2, a_3\}$, а функции переходов $f^{(i,j)}$ заданы таблицами переходов:

$f^{(0,1)}$	a_0
x_1	a_1
x_2	a_3
x_3	a_2

$f^{(1,3)}$	a_1	a_2	a_3
x_1	a_2	a_2	a_3
x_3	a_3	a_3	a_3

$f^{(1,2)}$	a_1	a_2	a_3
x_1	a_1	a_2	a_1
x_2	a_1	a_1	a_1
x_3	a_2	a_2	a_1

$f^{(0,2)}$	a_0
x_2	a_2
x_4	a_1

$f^{(3,2)}$	a_2	a_3
x_2	a_1	a_2
x_3	a_2	a_1

$f^{(2,1)}$	a_1	a_2
x_1	a_1	a_2
x_3	a_3	a_2

$f^{(2,3)}$	a_1	a_2
x_2	a_2	a_3
x_4	a_3	a_2

.

В вершине c_3 задана нечеткая цель, определяемая функцией принадлежности $\boldsymbol{\mu}_{\Sigma^3}$ со значениями $\boldsymbol{\mu}_{\Sigma^3}(a_i) = (0.7\ 0.3)^T$. В вершинах $c_i, i = \overline{0,3}$ заданы нечеткие ограничения на входные символы: $\boldsymbol{\mu}_{(0,1)}(x_s) = (0.5\ 0.6\ 0.9)^T$, $\boldsymbol{\mu}_{(2,1)}(x_s) = (0.8\ 0.7)^T$, $\boldsymbol{\mu}_{(1,2)}(x_s) = (0.7\ 0.4\ 0.7)^T$, $\boldsymbol{\mu}_{(1,3)}(x_s) = (0.5\ 0.3)^T$, $\boldsymbol{\mu}_{(3,2)}(x_s) = (0.9\ 0.4)^T$, $\boldsymbol{\mu}_{(0,2)}(x_s) = (0.3\ 0.4)^T$, $\boldsymbol{\mu}_{(2,3)}(x_s) = (0.6\ 0.3)^T$.

Требуется найти оптимальное управление, обеспечивающее максимально возможное достижение нечеткой цели в вершине c_3 графа с помощью метода автоматных итераций согласно алгоритму из раздела 10. При этом заметим, что поскольку ребро графа g_{32} не содержится в путях, у которых вершина c_3 только конечная, то структуру $\mathcal{A}_{32}$ и ограничения $\boldsymbol{\mu}_{(3,2)}$ в дальнейшем можно не рассматривать.

1. Определим $\mathbf{q}^{(3)} = (0.7\ 0.6)^T$ и $\mathbf{r}_0 = (1)$. По таблицам переходов автомата $f^{(i,j)}$ найдем автоматные матрицы заданного автомата:

$$\mathbf{U}^{(0,1)} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}^{(0,2)} = \begin{pmatrix} x_4 & x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}^{(2,1)} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & x_3 \\ 0 & x_1 \cup x_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U}^{(1,2)} = \begin{pmatrix} x_1 \cup x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 \cup x_3 \\ x_1 \cup x_2 \cup x_3 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{U}^{(1,3)} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_1 & x_3 \\ 0 & x_1 \cup x_3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{U}^{(2,3)} = \begin{pmatrix} x_2 & x_4 \\ x_4 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Используя ограничения $\boldsymbol{\mu}_{(i,j)}$, преобразуем полученные автоматные матрицы в «нечеткие» $\widetilde{\mathbf{U}}^{(i,j)}$: $\widetilde{\mathbf{U}}^{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0.5x_1 & 0.9x_3 & 0.6x_2 \end{pmatrix}$, $\widetilde{\mathbf{U}}^{(0,2)} = \begin{pmatrix} 0.4x_4 & 0.3x_2 \end{pmatrix}$,

$$\widetilde{\mathbf{U}}^{(1,2)} = \begin{pmatrix} 0.7x_1 \cup 0.4x_2 & 0.7x_3 \\ 0.4x_2 & 0.7x_1 \cup 0.7x_3 \\ 0.7x_1 \cup 0.4x_2 \cup 0.7x_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{U}}^{(1,3)} = \begin{pmatrix} 0.5x_1 & 0.3x_3 \\ 0.5x_1 & 0.3x_3 \\ 0 & 0.5x_1 \cup 0.3x_3 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{U}}^{(2,3)} = \begin{pmatrix} 0.6x_2 & 0.3x_4 \\ 0.3x_4 & 0.6x_2 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{U}}^{(2,1)} = \begin{pmatrix} 0.8x_1 & 0 & 0.7x_3 \\ 0 & 0.8x_1 \cup 0.7x_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Найдем матрицы максимальных весов переходов $\mathbf{F}^{(i,j)}$:

$$\mathbf{F}^{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.9 & 0.6 \end{pmatrix}, \ \mathbf{F}^{(0,2)} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{F}^{(2,1)} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}^{(1,2)} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.7 \\ 0.4 & 0.7 \\ 0.7 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{F}^{(1,3)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \ \mathbf{F}^{(2,3)} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

3. Для поиска максимальной степени достижения нечеткой цели в вершинах автомата рассмотрим конечную вершину c_3 и ребра g_{13} и g_{23}. Вычисляем $\mathbf{q}^{(1)}_{(1,3)} = \mathbf{F}^{(1,3)}\mathbf{q}^{(3)} = (0.5\ 0.5\ 0.5) = \max \mathbf{q}^{(1)}(\{a_1, a_2, a_3\})$ и $\mathbf{q}^{(2)}_{(2,3)} = \mathbf{F}^{(2,3)}\mathbf{q}^{(3)} = (0.6\ 0.3) = \max \mathbf{q}^{(2)}(\{a_1, a_2\})$.

Из вершины c_1 вычисляем по g_{01} и g_{21}: $\mathbf{q}^{(0)}_{(0,1)} = \mathbf{F}^{(0,1)}\mathbf{q}^{(1)}_{(1,3)} = (0.5) = \max \mathbf{q}^{(0)}(\{a_0\})$ и $\mathbf{q}^{(2)}_{(2,1)} = \mathbf{F}^{(2,1)}\mathbf{q}^{(1)}_{(1,3)} = (0.5\ 0.5)$, таким образом, $\mathbf{q}^{(2)}_{(2,1)} = \max \mathbf{q}^{(2)}(\{a_2\})$, $\mathbf{q}^{(2)}_{(2,3)} = \max \mathbf{q}^{(2)}(\{a_1\})$.

Из вершины c_2 вычисляем по g_{02} и g_{12}: $\mathbf{q}^{(0)}_{(0,2)} = \mathbf{F}^{(0,2)}\mathbf{q}^{(2)}_{(2,3)} = \mathbf{F}^{(0,2)}\mathbf{q}^{(2)}_{(2,1)} = (0.4) < \max \mathbf{q}^{(0)}$ и $\mathbf{q}^{(1)}_{(1,2)} = \mathbf{F}^{(1,2)}\mathbf{q}^{(2)}_{(2,3)} = (0.6\ 0.4\ 0.6)$, значит, $\mathbf{q}^{(1)}_{(1,2)} = \max \mathbf{q}^{(1)}(\{a_1, a_3\})$, $\mathbf{q}^{(1)}_{(1,3)} = \max \mathbf{q}^{(1)}(\{a_2\})$. Вычислим $\mathbf{q}^{(1)}_{(1,2)} = \mathbf{F}^{(1,2)}\mathbf{q}^{(2)}_{(2,1)} = (0.5\ 0.5\ 0.5)$, значит, $\{\max \mathbf{q}^{(1)}\}$ не меняется. Вычислим $\mathbf{q}^{(0)}_{(0,1)} = \mathbf{F}^{(0,1)}\mathbf{q}^{(1)}_{(1,2)} = (0.6) = \max \mathbf{q}^{(0)}$ и $\mathbf{q}^{(2)}_{(2,1)} = \mathbf{F}^{(2,1)}\mathbf{q}^{(1)}_{(1,2)} = (0.6\ 0.4)$. Поскольку по a_1 и a_2 максимумы не превышены, они не меняются. Это означает, что максимальная степень достижения нечеткой цели $\mu^{(3)}_{\max} = \max \mathbf{q}^{(0)} = 0.6$.

Теперь рассмотрим ребра, на которых достигались $\max \mathbf{q}^{(i)}$, и оставим только те из них, у которых хоть один компонент вектора $\mathbf{q}^{(i)}_{(i,j)}$ равен 0.6. Таким образом, заданная нечеткая цель со степенью достижения 0.6 достигается на путях вида $\Omega^{\max}_{03} = c_0 c_1 (c_2 c_1)^n c_2 c_3$, где $n \geqslant 0$.

4. Строим матрицы $\widehat{\mathbf{U}}^{(i,j)}, (i,j) \in \{(0,1),(1,2),(2,1),(2,3)\}, \widehat{\mathbf{r}}_0 = (1), \widehat{\mathbf{q}}^{(3)} = (1\ 0)^T$.

$$\widehat{\mathbf{U}}^{(0,1)} = 0\ x_3\ x_2,\ \widehat{\mathbf{U}}^{(1,2)} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ 0 & x_1 \cup x_3 \\ x_1 \cup x_3 & 0 \end{pmatrix},\ \widehat{\mathbf{U}}^{(2,1)} = \mathbf{U}^{(2,1)},\ \widehat{\mathbf{U}}^{(2,3)} = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Найдем регулярное выражение языка для самого короткого пути $\Omega_{03}^{\max}$ для случая $n = 0$:

$$\mathcal{Z}_{\max}(\Omega_{03}^{\max}) = \widehat{\mathbf{r}}_0 \widehat{\mathbf{U}}^{(0,1)} \widehat{\mathbf{U}}^{(1,2)} \widehat{\mathbf{U}}^{(2,3)} \widehat{\mathbf{q}}^{(3)} = x_2(x_1 \cup x_3)x_2.$$

В данном случае можно определить и нечеткое управление для пути $\Omega_{03}^{\max}$ при любом n:

$$\mathcal{Z}_{\max}(\Omega_{03}^{\max}) = \widehat{\mathbf{r}}_0 \widehat{\mathbf{U}}^{(0,1)} \widehat{\mathbf{U}}^{(1,2)} \left(\widehat{\mathbf{U}}^{(2,1)} \widehat{\mathbf{U}}^{(1,2)}\right)^n \widehat{\mathbf{U}}^{(2,3)} \widehat{\mathbf{q}}^{(3)} =$$
$$= x_2(x_1 \cup x_3)(x_1 x_1 \cup x_3(x_1 \cup x_3))^n x_2.$$

Литература

1. *Мосягина Е. Н., Чирков М. К.* Оптимальное управление периодически-нестационарными автоматными моделями в нечетких условиях (Теория автоматных моделей). СПб.: СПбГУ, 2014. 144 с.
2. *Пономарева А. Ю., Чирков М. К.* Оптимизация обобщенных конечно-нестационарных минимаксных нечетких автоматов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Т. 1 (59). Вып. 4. 2014. С. 561–570.
3. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982. 432 с.
4. *Zadeh L. A.* Fuzzy Sets // Information and Control. Vol. 8. 1965. P. 338–353.
5. URL: http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/alekseev_zakharova.pdf

Статья поступила в редакцию 22 октября 2015 г.

Сведения об авторе

Пономарёва Александра Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент;
a_ponomareva@mail.ru

A BEHAVIOR OF THE FINITE-NONSTATIONARY DETERMINISTIC AUTOMATA IN THE FUZZY ENVIRONMENT

Aleksandra Yu. Ponomareva

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation;
a_ponomareva@mail.ru

In this paper we propose a method of finding optimal control of generalized deterministic abstract automaton, which structure is given at an arbitrary finite graph, functioning in the fuzzy given environment. The control is found for achieving fuzzy goal, which is given as a fuzzy set in any fixed finite vertex of the structural graph of the automaton. A solution of the problem consists of two stages, the first of which gives maximally possible degree of the achieving fuzzy goal depending from the way from initial vertex of a graph to fixed, and the second stage allows to construct a set of input words, providing an achieving this goal on chosen way. In conclusion, an example of application of proposed method of construction regular expressions controlling sequences to a given abstract finite-nonstationary deterministic automaton is given. Refs 5. Figs 2.

Keywords: finite-nonstationary generalized deterministic abstract automaton, optimal control, the fuzzy given environment, fuzzy goal.

References

1. Mosyagina E. N., Chirkov M. K., *An optimal control of periodically-nonstationary automata models in the fuzzy conditions (Theories of automata models)* (St. Petersburg, SPbU, 2014, 144 p.) [in Russian].
2. Ponomareva A. Yu., Chirkov M. K., “Optimization of generalized finite-nonstationary minimax fuzzy automata”, *Vestnik of St.Petersburg University. Series 1* **1**(59), issue 4, 561–570 (2014) [in Russian].
3. Kaufmann A., *Introduction a la théorie des sour-ensembles flous* (Paris, Masson, 1977).
4. Zadeh L. A., “Fuzzy Sets”, *Information and Control* **8**, 338–353 (1965).
5. http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/alekseev_zakharova.pdf [in Russian].