УДК 517.373 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 1

КОМПЛЕКСНАЯ ВЕКТОРНАЯ МЕРА И ИНТЕГРАЛ НА МНОГООБРАЗИЯХ С ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫМИ ВАРИАЦИЯМИ

А. В. Потепун

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Хорошо известно определение интеграла от комплексной дифференциальной n-формы с компактным носителем на вещественно n-мерных C^1-многообразиях в $\mathbb{C}^m$ $(m \geqslant n)$. Для $n = 1$ этот интеграл определён и на локально спрямляемых кривых. Другое обобщение — теория потоков (линейных функционалов на пространстве C^∞-дифференциальных форм с компактными носителями). Тема статьи — интегрирование измеримых комплексных дифференциальных форм бистепени $(n, 0)$ (не содержащих $d\bar{z}_j$) на вещественно n-мерных C^0-многообразиях в $\mathbb{C}^m$ с локально конечными n-мерными вариациями (обобщение локально спрямляемых кривых на случай размерностей $n > 1$). Последняя теорема статьи устанавливает, что вещественно n-мерное C^1-многообразие, гладко вложенное в $\mathbb{C}^m$, имеет локально конечные вариации и интеграл от измеримой комплексной дифференциальной формы бистепени $(n, 0)$, определённый в статье, вычисляется по хорошо известной формуле. Библиогр. 5 назв.

Ключевые слова: интегрирование дифференциальной формы, комплексная векторная мера, n-вектор, многообразие с локально конечными вариациями.

Как известно, теория интегрирования дифференциальных форм на гладких многообразиях может быть обобщена на случай кусочно-гладких многообразий, а если размерность равна 1 — на случай спрямляемых кривых (см., например, [1, т. III, гл. 3]). В статье [2] было получено обобщение теории интегрирования 1-форм по спрямляемым кривым на высшие размерности. А именно, были определены понятия n-мерного многообразия в $\mathbb{R}^m$ с локально конечными вариациями (в частности, таковыми являются многообразия с локально конечной n-мерной мерой Хаусдорфа) и некоторой векторной меры на нем со значениями в пространстве n-векторов. Интеграл от дифференциальной формы определяется как интеграл по этой векторной мере. Цель данной статьи — обобщение теории интегрирования комплексных дифференциальных форм, а именно форм бистепени $(n, 0)$ (не содержащих $d\bar{z}_j$), на случай интегрирования по вещественно n-мерным многообразиям с локально конечными вариациями в $\mathbb{C}^m$. На таких многообразиях определяются векторная мера со значениями в пространстве комплексных n-векторов и интеграл от измеримой дифференциальной формы бистепени $(n, 0)$ по этой мере. В случае вещественно n-мерного многообразия в $\mathbb{C}^n$ векторную меру можно отождествить с мерой, значениями которой являются комплексные числа.

Как известно, в теории функций нескольких комплексных переменных наиболее важны голоморфные дифференциальные формы (формы бистепени $(n, 0)$ с голоморфными коэффициентами). В частности, для формы $f(z_1, \ldots, z_n)dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$ верна теорема Коши—Пуанкаре о равенстве нулю интеграла по гладкой границе $n+1$-мерной поверхности. Автор предполагает возможность обобщения этого результата на случай границы с конечной n-мерной мерой Хаусдорфа.

В статье доказывается, что в случае многообразия, гладко вложенного в $\mathbb{C}^m$, определение интеграла от дифференциальной формы совпадает с общеизвестным.

Определим отображение из $\mathbb{R}^{2m}$ в $\mathbb{C}^m$:

$$I(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_m, y_m) = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \dots, x_m + iy_m)$$

(отождествление элементов $\mathbb{R}^{2m}$ и $\mathbb{C}^m$). Тогда, если e_j — координатные орты пространства $\mathbb{R}^{2m}$, имеем

$$I(e_j) = \begin{cases} \tilde{e}_k, & \text{если } j = 2k-1; \\ i\tilde{e}_k, & \text{если } j = 2k, \end{cases}$$

где $\tilde{e}_j$ — базисные векторы пространства $\mathbb{C}^m$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant m$. С помощью отображения I можно определить отображение из множества n-векторов в $\mathbb{R}^{2m}$ над полем $\mathbb{R}$ в множество n-векторов над полем $\mathbb{C}$ следующим образом: пусть $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant j_1 < \dots < j_n \leqslant 2m$, $\alpha = \{j_1, \dots, j_n\}$, $e_\alpha = e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_n}$ — простой n-вектор в $\mathbb{R}^{2m}$. Определим $P(\alpha) = \beta$, где $\beta = \{k_1, \dots, k_n\}$, $k_p = [(j_p+1)/2]$ (целая часть дроби $\frac{j_p+1}{2}$). Тогда положим

$$J(e_\alpha) = I(e_{j_1}) \wedge \dots \wedge I(e_{j_n}) \text{ — простой } n\text{-вектор в } \mathbb{C}^m.$$

Из определения $I(e_j)$ ясно, что

$$J(e_\alpha) = i^{q(\alpha)} \tilde{e}_\beta, \text{ где } q(\alpha) \text{ — количество чётных } j_p \text{ в множестве } \alpha. \tag{1}$$

При этом, если $j_p = 2k-1$, $j_{p+1} = 2k$, то $k_p = k_{p+1}$ и $\tilde{e}_\beta = \tilde{e}_{k_1} \wedge \dots \wedge \tilde{e}_{k_n} = \mathbf{0}$, т. е. $J(e_\alpha)$ — нулевой.

В общем случае для n-вектора $\sum\limits_\alpha \lambda_\alpha e_\alpha$ положим

$$J\Big(\sum_\alpha \lambda_\alpha e_\alpha\Big) = \sum_\alpha \lambda_\alpha J(e_\alpha) \text{ — } n\text{-вектор в } \mathbb{C}^m.$$

Пусть $m \geqslant n$ и M — ориентированное многообразие вещественной размерности n с локально конечными вариациями, вложенное в $\mathbb{C}^m$. В статье [2] была определена мера на многообразии M (в данном случае вложенном в $\mathbb{R}^{2m}$), значениями которой являются вещественные n-векторы:

$$\mu_M(E) = \sum_\alpha \mu_\alpha(E)\, e_\alpha, \quad E \in \mathfrak{R}_M,$$

где $\mu_\alpha(E)$ — ориентированная мера α-проекции множества E, $\mathfrak{R}_M$ — δ-кольцо измеримых подмножеств M (напомним, что [2, § 4, определение после леммы 9]):

$$\mathfrak{R}_M = \Big\{E \subset M \mid E \in \bigcap_\alpha (\mathfrak{A}_\alpha^+ \cap \mathfrak{A}_\alpha^-), \text{ для любого } \alpha \quad \mu_\alpha^+(E),\ \mu_\alpha^-(E) \text{ конечны}\Big\}.$$

Здесь $\mathfrak{A}_\alpha^+$ и $\mathfrak{A}_\alpha^-$ — σ-алгебры, на которых соответственно определены меры μ_α^+ и μ_α^-.

Определение 1. *Назовём комплексной n-векторной мерой множества E, принадлежащего δ-кольцу $\mathfrak{R}_M$, комплексный n-вектор*

$$\tilde{\mu}_M(E) = J(\mu_M(E)) = \sum_\alpha \mu_\alpha(E) J(e_\alpha).$$

Очевидно, что в этой формуле можно рассматривать сумму только для тех α, для которых $J(e_\alpha) \neq \mathbf{0}$, а тогда $P(\alpha) = \beta = \{k_1, \ldots, k_n\}$, $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_n \leqslant m$. В дальнейшем тексте всегда будем обозначать

$$\alpha = \{j_1, \ldots, j_n\}, \text{ где } j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_n \leqslant 2m,$$
$$\beta = \{k_1, \ldots, k_n\}, \text{ где } k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant k_1 < \ldots < k_n \leqslant m.$$

Рассмотрим все α, для которых $P(\alpha) = \beta$ при фиксированном β. Тогда (см. (1)) имеем $J(e_\alpha) = i^{q(\alpha)}\tilde{e}_\beta$, и сумма разбивается на группы слагаемых:

$$\tilde{\mu}_M(E) = \sum_\beta \left(\sum_{P(\alpha)=\beta} i^{q(\alpha)} \mu_\alpha(E) \right) \tilde{e}_\beta = \sum_\beta \bar{\mu}_\beta(E)\tilde{e}_\beta, \tag{2}$$

где $\beta = \{k_1, \ldots, k_n\}$, $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_n \leqslant m$ и

$$\bar{\mu}_\beta(E) = \sum_{P(\alpha)=\beta} i^{q(\alpha)} \mu_\alpha(E) \tag{3}$$

— комплексная мера проекции множества E на подпространство $\mathbb{C}^m$, порождённое векторами $\tilde{e}_{k_1}, \ldots, \tilde{e}_{k_n}$.

В случае $n = m$ пространство комплексных n-векторов одномерно ($\beta = \{1, 2, \ldots, m\}$ — единственный вариант), поэтому

$$\tilde{\mu}_M(E) = \left(\sum_{P(\alpha)=\{1,2,\ldots,m\}} i^{q(\alpha)} \mu_\alpha(E) \right) \tilde{e}_1 \wedge \ldots \wedge \tilde{e}_m.$$

В этом случае вместо n-векторной меры $\tilde{\mu}_M$ можно рассматривать меру на $\mathfrak{R}_M$, значениями которой являются комплексные числа:

$$\bar{\mu}_M(E) = \bar{\mu}_{\{1,2,\ldots,m\}}(E) = \sum_{P(\alpha)=\{1,2,\ldots,m\}} i^{q(\alpha)} \mu_\alpha(E).$$

Как известно [4, Ch. I, § 3], если m — аддитивная вектор-функция, заданная на кольце $\mathfrak{R}$ подмножеств множества T и принимающая значения в нормированном пространстве X, ее вариацией называется следующая функция:

$$|m|(A) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^p \|m(A_k)\| \;\middle|\; \bigcup_{k=1}^p A_k \subset A,\ A_k \in \mathfrak{R} \text{ и дизъюнктны} \right\}$$

(здесь $\|m(A_k)\|$ — норма вектора $m(A_k)$ в пространстве X). Вектор-функция m имеет конечную вариацию, если для любого $A \in \mathfrak{R}$ $|m|(A) < \infty$.

Лемма 1. *Меры $\bar{\mu}_\beta$ и $\tilde{\mu}_M$ имеют конечную вариацию.*

Доказательство. 1) Пусть $A \in \mathfrak{R}_M$, $\bigcup_{k=1}^p A_k \subset A$, $A_k \in \mathfrak{R}_M$ и дизъюнктны. Тогда имеем (см. (3))

$$\sum_{k=1}^{p} |\bar{\mu}_\beta(A_k)| = \sum_{k=1}^{p} \left| \sum_{P(\alpha)=\beta} i^{q(\alpha)} \mu_\alpha(A_k) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{p} \sum_{P(\alpha)=\beta} \left| i^{q(\alpha)} \mu_\alpha(A_k) \right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \sum_{P(\alpha)=\beta} \left| \mu_\alpha^+(A_k) - \mu_\alpha^-(A_k) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{p} \sum_{P(\alpha)=\beta} \big(\mu_\alpha^+(A_k) + \mu_\alpha^-(A_k) \big) =$$

$$= \sum_{P(\alpha)=\beta} \left(\sum_{k=1}^{p} \mu_\alpha^+(A_k) + \sum_{k=1}^{p} \mu_\alpha^-(A_k) \right) \leqslant \sum_{P(\alpha)=\beta} \big(\mu_\alpha^+(A) + \mu_\alpha^-(A) \big).$$

Тогда, поскольку $A \in \mathfrak{R}_M$, числа $\mu_\alpha^+(A)$, $\mu_\alpha^-(A)$ конечны и

$$|\bar{\mu}_\beta|(A) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{p} |\bar{\mu}_\beta(A_k)| \right\} \leqslant \sum_{P(\alpha)=\beta} \big(\mu_\alpha^+(A) + \mu_\alpha^-(A) \big) < \infty.$$

2) Поскольку пространство n-векторов в $\mathbb{C}^m$ конечномерно, все нормы в этом пространстве эквивалентны, и можно рассматривать произвольную норму

$$\tilde{\mu}_M(A_k) = \sum_{\beta} \bar{\mu}_\beta(A_k) \tilde{e}_\beta.$$

По свойствам нормы

$$\sum_{k=1}^{p} \|\tilde{\mu}_M(A_k)\| \leqslant \sum_{k=1}^{p} \sum_{\beta} |\bar{\mu}_\beta(A_k)| \cdot \|\tilde{e}_\beta\| \leqslant \sum_{k=1}^{p} \max_{\beta} \|\tilde{e}_\beta\| \sum_{\beta} |\bar{\mu}_\beta(A_k)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\beta} \|\tilde{e}_\beta\| \sum_{\beta} \left(\sum_{k=1}^{p} |\bar{\mu}_\beta(A_k)| \right) \leqslant \max_{\beta} \|\tilde{e}_\beta\| \sum_{\beta} \sum_{P(\alpha)=\beta} \big(\mu_\alpha^+(A) + \mu_\alpha^-(A) \big) \quad \text{(см. п. 1)}.$$

Тогда

$$|\tilde{\mu}_M|(A) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{p} \|\tilde{\mu}_M(A_k)\| \right\} \leqslant \max_{\beta} \|\tilde{e}_\beta\| \sum_{\beta} \sum_{P(\alpha)=\beta} \big(\mu_\alpha^+(A) + \mu_\alpha^-(A) \big) < \infty. \quad \blacksquare$$

Теорема 1. *Пусть M — ориентированное многообразие вещественной размерности n, гладко вложенное в $\mathbb{C}^m$ $(m \geqslant n)$, $E \subset U = f(\mathbb{R}^n)$, f — положительная параметризация (диффеоморфизм класса $C^{(1)}$) окрестности $U \subset M$, $E \in \bigcap\limits_\alpha (\mathfrak{A}_\alpha^+ \cap \mathfrak{A}_\alpha^-)$. Тогда множество $f^{-1}(E)$ измеримо по мере Лебега и для любого $\beta = \{k_1, \ldots, k_n\}$*

$$\text{если } E \in \mathfrak{R}_M, \text{ то } \bar{\mu}_\beta(E) = \int\limits_{f^{-1}(E)} \det f'_\beta \, d\lambda_n,$$

$$\text{если } E \in \bigcap_\alpha (\mathfrak{A}_\alpha^+ \cap \mathfrak{A}_\alpha^-), \text{ то } |\bar{\mu}_\beta|(E) = \int\limits_{f^{-1}(E)} |\det f'_\beta| \, d\lambda_n.$$

Здесь если

$$f:\begin{cases} z_1 = x_1 + iy_1 = f_1(t_1,\dots,t_n),\\ \vdots\\ z_m = x_m + iy_m = f_m(t_1,\dots,t_n), \end{cases} \qquad f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \frac{\partial f_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial t_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial t_1} & \frac{\partial f_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial t_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial t_1} & \frac{\partial f_m}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial t_n} \end{pmatrix},$$

$\det f'_\beta$ — это определитель, составленный из строк матрицы f' с номерами $k_1,\dots,k_n$.

Доказательство. 1) Запишем координатные функции отображения f в вещественном виде:

$$f:\begin{cases} x_1 = g_1(t_1,\dots,t_n),\\ y_1 = g_2(t_1,\dots,t_n),\\ \vdots\\ x_m = g_{2m-1}(t_1,\dots,t_n),\\ y_m = g_{2m}(t_1,\dots,t_n), \end{cases} \qquad \text{т. е. } f_k = g_{2k-1} + ig_{2k}.$$

По доказанному в [3, теорема 2] множество $f^{-1}(E)$ измеримо по Лебегу и, по доказанному в той же теореме в конце п. 3.3,

$$\mu_{j_1\dots j_n}(E) = \mu_\alpha(E) = \int\limits_{f^{-1}(E)} \det g'_\alpha \, d\lambda_n.$$

Тогда, по (3), имеем

$$\bar\mu_\beta(E) = \sum_{P(\alpha)=\beta} i^{q(\alpha)}\mu_\alpha(E) = \int\limits_{f^{-1}(E)} \sum_{P(\alpha)=\beta} i^{q(\alpha)} \det g'_\alpha \, d\lambda_n. \tag{4}$$

$$\det f'_\beta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{k_1}}{\partial t_1} & \frac{\partial f_{k_1}}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial f_{k_1}}{\partial t_n}\\ \frac{\partial f_{k_2}}{\partial t_1} & \frac{\partial f_{k_2}}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial f_{k_2}}{\partial t_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_{k_n}}{\partial t_1} & \frac{\partial f_{k_n}}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial f_{k_n}}{\partial t_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_{2k_1-1}}{\partial t_1} + i\frac{\partial g_{2k_1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial g_{2k_1-1}}{\partial t_n} + i\frac{\partial g_{2k_1}}{\partial t_n}\\ \frac{\partial g_{2k_2-1}}{\partial t_1} + i\frac{\partial g_{2k_2}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial g_{2k_2-1}}{\partial t_n} + i\frac{\partial g_{2k_2}}{\partial t_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial g_{2k_n-1}}{\partial t_1} + i\frac{\partial g_{2k_n}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial g_{2k_n-1}}{\partial t_n} + i\frac{\partial g_{2k_n}}{\partial t_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial g_{2k_1-1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial g_{2k_1-1}}{\partial t_n}\\ \frac{\partial g_{2k_2-1}}{\partial t_1} + i\frac{\partial g_{2k_2}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial g_{2k_2-1}}{\partial t_n} + i\frac{\partial g_{2k_2}}{\partial t_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial g_{2k_n-1}}{\partial t_1} + i\frac{\partial g_{2k_n}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial g_{2k_n-1}}{\partial t_n} + i\frac{\partial g_{2k_n}}{\partial t_n} \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} \frac{\partial g_{2k_1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial g_{2k_1}}{\partial t_n}\\ \frac{\partial g_{2k_2-1}}{\partial t_1} + i\frac{\partial g_{2k_2}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial g_{2k_2-1}}{\partial t_n} + i\frac{\partial g_{2k_2}}{\partial t_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial g_{2k_n-1}}{\partial t_1} + i\frac{\partial g_{2k_n}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial g_{2k_n-1}}{\partial t_n} + i\frac{\partial g_{2k_n}}{\partial t_n} \end{vmatrix}.$$

Повторяя эту операцию для каждой строки исходного определителя, представляющей собой сумму строки из частных производных функции g_{2k_p-1} и строки из частных производных функции g_{2k_p}, умноженной на i, получим

$$\det f'_\beta = \sum_{j_1=2k_1-1}^{2k_1} \sum_{j_2=2k_2-1}^{2k_2} \cdots \sum_{j_n=2k_n-1}^{2k_n} i^{q(j_1,\dots,j_n)} \det g'_{j_1\dots j_n} = \sum_{P(\alpha)=\beta} i^{q(\alpha)} \det g'_\alpha,$$

где $q(\alpha)$ — количество чётных индексов в наборе $\alpha = \{j_1, \ldots, j_n\}$, т. е. (см. (4))

$$\bar{\mu}_\beta(E) = \int\limits_{f^{-1}(E)} \det f'_\beta \, d\lambda_n.$$

2.1) Пусть $\bigcup\limits_{k=1}^{p} E_k \subset E, \quad E \in \bigcap\limits_{\alpha} (\mathfrak{A}^+_\alpha \cap \mathfrak{A}^-_\alpha), \quad E_k \in \mathfrak{R}_M$ и дизъюнктны. По п. 1 имеем

$$\sum_{k=1}^{p} \big|\bar{\mu}_\beta(E_k)\big| = \sum_{k=1}^{p} \Bigg| \int\limits_{f^{-1}(E_k)} \det f'_\beta \, d\lambda_n \Bigg| \leqslant \sum_{k=1}^{p} \int\limits_{f^{-1}(E_k)} |\det f'_\beta| \, d\lambda_n =$$

$$= \int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{p} f^{-1}(E_k)} |\det f'_\beta| \, d\lambda_n \leqslant \int\limits_{f^{-1}(E)} |\det f'_\beta| \, d\lambda_n.$$

По определению вариации следует

$$|\bar{\mu}_\beta|(E) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{p} \big|\bar{\mu}_\beta(E_k)\big| \right\} \leqslant \int\limits_{f^{-1}(E)} |\det f'_\beta| \, d\lambda_n. \tag{5}$$

2.2) Пусть $E \in \mathfrak{R}_M$, $E \subset K \subset U$, K компактно. Тогда $f^{-1}(K)$ тоже компактно (f — гомеоморфизм $\mathbb{R}^n$ на U), непрерывная функция $\det f'_\beta$ равномерно непрерывна на $f^{-1}(K)$, т. е.

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \forall\, t, t' \in f^{-1}(K) \quad |t - t'| \leqslant \delta \Rightarrow |\det f'_\beta(t) - \det f'_\beta(t')| \leqslant \varepsilon. \tag{6}$$

Покроем $f^{-1}(K)$ открытыми шарами диаметра δ и выберем конечное подпокрытие: $f^{-1}(K) \subset \bigcup_{k=1}^{p} B_k$. Поскольку $K \subset U = f(\mathbb{R}^n)$, легко проверить, что $K = f\big(f^{-1}(K)\big) \subset \bigcup_{k=1}^{p} f(B_k)$. Отображение f — гомеоморфизм $\mathbb{R}^n$ и U, поэтому $f(B_k)$ открыты в открытой окрестности $U \subset M$, значит, открыты в M, т. е. α^+-измеримы для любого $\alpha = \{j_1, \ldots, j_n\}$ (см. [2, § 4, лемма 8]). Аналогичное верно для α^--измеримости (см. [2, § 4, замечание после леммы 9]), а тогда

$$f(B_k) \in \bigcap_{\alpha} \big(\mathfrak{A}^+_\alpha \cap \mathfrak{A}^-_\alpha\big) \Longrightarrow E \cap f(B_k) \in \bigcap_{\alpha} \big(\mathfrak{A}^+_\alpha \cap \mathfrak{A}^-_\alpha\big),$$

$$\mu^+_\alpha(E \cap f(B_k)) \leqslant \mu^+_\alpha(E) < \infty, \quad \mu^-_\alpha(E \cap f(B_k)) \leqslant \mu^-_\alpha(E) < \infty,$$

т. е. $E \cap f(B_k) \in \mathfrak{R}_M$. Положим

$$E_1 = E \cap f(B_1), \quad E_k = (E \cap f(B_k)) \setminus \bigcup_{s=1}^{k-1} (E \cap f(B_s)) \text{ для } k = 2, \ldots, p.$$

Легко проверить, что множества E_k дизъюнктны, $E = \bigcup_{k=1}^{p} E_k$, и, по свойствам кольца, все $E_k \in \mathfrak{R}_M$. Отображение f инъективно, поэтому $f^{-1}(f(B_k)) = B_k$, а тогда

$$f^{-1}(E_k) \subset f^{-1}\big(E \cap f(B_k)\big) \subset f^{-1}(E) \cap B_k \subset B_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{diam}\big(f^{-1}(E_k)\big) \leqslant \delta \Rightarrow \text{ (см. (6)) для } \forall\, t, t_k \in E_k \quad |\det f'_\beta(t) - \det f'_\beta(t_k)| \leqslant \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\det f'_\beta(t)| \leqslant |\det f'_\beta(t_k)| + |\det f'_\beta(t) - \det f'_\beta(t_k)| \leqslant \varepsilon + |\det f'_\beta(t_k)|.$$

Кроме того, множества $f^{-1}(E_k)$ измеримы по мере Лебега (см. [3, теорема 2]). Тогда для фиксированного $t_k \in E_k$ получим

$$\int\limits_{f^{-1}(E_k)} |\det f'_\beta|(t)\, d\lambda_n \leqslant \varepsilon \cdot \lambda_n\big(f^{-1}(E_k)\big) + |\det f'_\beta(t_k)| \cdot \lambda_n\big(f^{-1}(E_k)\big) =$$

$$= \varepsilon\cdot\lambda_n\big(f^{-1}(E_k)\big) + \big|\det f'_\beta(t_k)\cdot\lambda_n\big(f^{-1}(E_k)\big)\big| = \varepsilon\cdot\lambda_n\big(f^{-1}(E_k)\big) + \left|\int\limits_{f^{-1}(E_k)} \det f'_\beta(t_k)\, d\lambda_n\right| =$$

$$= \varepsilon \cdot \lambda_n\big(f^{-1}(E_k)\big) + \left|\int\limits_{f^{-1}(E_k)} \det f'_\beta(t)\, d\lambda_n + \int\limits_{f^{-1}(E_k)} \big(\det f'_\beta(t_k) - \det f'_\beta(t)\big)\, d\lambda_n\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \cdot \lambda_n\big(f^{-1}(E_k)\big) + \left|\int\limits_{f^{-1}(E_k)} \det f'_\beta(t)\, d\lambda_n\right| + \int\limits_{f^{-1}(E_k)} |\det f'_\beta(t_k) - \det f'_\beta(t)|\, d\lambda_n \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \cdot \lambda_n\big(f^{-1}(E_k)\big) + \left|\int\limits_{f^{-1}(E_k)} \det f'_\beta(t)\, d\lambda_n\right| + \varepsilon \cdot \lambda_n\big(f^{-1}(E_k)\big) =$$

$$= 2\varepsilon \cdot \lambda_n\big(f^{-1}(E_k)\big) + \big|\bar\mu_\beta(E_k)\big| \quad \text{(см. п. 1)}.$$

Поскольку множества E_k дизъюнктны и $E = \bigcup_{k=1}^p E_k$, то $f^{-1}(E_k)$ тоже дизъюнктны и $f^{-1}(E) = \bigcup_{k=1}^p f^{-1}(E_k)$. В результате получим

$$\int\limits_{f^{-1}(E)} |\det f'_\beta|(t)\, d\lambda_n = \sum_{k=1}^p \int\limits_{f^{-1}(E_k)} |\det f'_\beta|(t)\, d\lambda_n \leqslant 2\varepsilon \sum_{k=1}^p \lambda_n\big(f^{-1}(E_k)\big) + \sum_{k=1}^p \big|\bar\mu_\beta(E_k)\big| \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon \cdot \lambda_n\big(f^{-1}(E)\big) + |\bar\mu_\beta|(E) \quad \text{(по определению вариации меры)},$$

$$\text{т. е.} \quad \int\limits_{f^{-1}(E)} |\det f'_\beta|(t)\, d\lambda_n \leqslant 2\varepsilon \cdot \lambda_n\big(f^{-1}(E)\big) + |\bar\mu_\beta|(E). \tag{7}$$

$f^{-1}(E) \subset f^{-1}(K)$, множество $f^{-1}(K)$ компактно, поэтому $\lambda_n\big(f^{-1}(E)\big) < \infty$. Переходя в неравенстве (7) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\int\limits_{f^{-1}(E)} |\det f'_\beta|(t)\, d\lambda_n \leqslant |\bar\mu_\beta|(E) \overset{\text{см.(5)}}{\Longrightarrow} \int\limits_{f^{-1}(E)} |\det f'_\beta|(t)\, d\lambda_n = |\bar\mu_\beta|(E).$$

2.3) Пусть $C_k = \prod_{j=1}^n [-k; k]$, тогда $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^\infty C_k$ и $U = f(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{k=1}^\infty f(C_k)$. Для произвольного $E \in \bigcap\limits_\alpha (\mathfrak{A}^+_\alpha \cap \mathfrak{A}^-_\alpha)$, $E \subset U$ обозначим

$$E_1 = E \cap f(C_1), \quad E_k = \big(E \cap f(C_k)\big) \setminus \bigcup_{s=1}^{k-1} \big(E \cap f(C_s)\big) \quad \text{для} \quad k = 2, 3, \ldots$$

Легко проверить, что E_k дизъюнктны и $E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$. f — гомеоморфизм, поэтому $f(C_k)$ компактны, при этом по теореме 6 из [2, § 4] $f(C_k) \in \mathfrak{R}_M \subset \bigcap\limits_\alpha (\mathfrak{A}^+_\alpha \cap \mathfrak{A}^-_\alpha)$. По свойствам σ-алгебры

$$f(C_k) \in \bigcap_\alpha (\mathfrak{A}_\alpha^+ \cap \mathfrak{A}_\alpha^-) \Longrightarrow E_k \in \bigcap_\alpha (\mathfrak{A}_\alpha^+ \cap \mathfrak{A}_\alpha^-),$$
$$\mu_\alpha^+(E_k) \leqslant \mu_\alpha^+\big(f(C_k)\big) < \infty, \quad \mu_\alpha^-(E_k) \leqslant \mu_\alpha^-\big(f(C_k)\big) < \infty,$$

т. е. все $E_k \in \mathfrak{R}_M$. Поскольку $\bar{\mu}_\beta$ счётно аддитивна, вариация $|\bar{\mu}_\beta|$ тоже счётно аддитивна (см. [4, Ch. I, § 3]). Тогда, поскольку $E_k \subset f(C_k)$, по п. 2.2

$$|\bar{\mu}_\beta|(E) = \sum_{k=1}^\infty |\bar{\mu}_\beta|(E_k) = \sum_{k=1}^\infty \int\limits_{f^{-1}(E_k)} |\det f'_\beta|(t)\, d\lambda_n = \int\limits_{f^{-1}(E)} |\det f'_\beta|(t)\, d\lambda_n. \ \blacksquare$$

Определение 2. *Пусть $m \geqslant n$ и M — ориентированное n-мерное многообразие в $\mathbb{C}^m$ с локально конечными вариациями. Функция $\omega : M \times (\mathbb{C}^m)^n \to \mathbb{C}$ называется ступенчатой дифференциальной n-формой на M, если существуют конечные семейства множеств $\{E_k\}_{k=1}^p$, $E_k \in \mathfrak{R}_M$, и внешних n-форм $\{\varphi_k\}_{k=1}^p$ над полем $\mathbb{C}$ такие, что*

$$\omega = \sum_{k=1}^p \varphi_k \chi_{E_k} \quad (\chi_{E_k} \text{ — характеристическая функция множества } E_k).$$

Поскольку $\mathfrak{R}_M$ — δ-кольцо, можно считать, что множества E_k дизъюнктны [4, Ch. II, § 6, п. 1].

Как известно [5, гл. III, § 5, п. 5, схолия], внешняя n-форма φ порождает $\mathbb{C}$-линейный функционал $\tilde{\varphi}$ на пространстве n-векторов, при этом для базисных n-векторов

$$\tilde{\varphi}(\tilde{e}_{i_1} \wedge \tilde{e}_{i_2} \wedge \ldots \wedge \tilde{e}_{i_n}) = \varphi(\tilde{e}_{i_1}, \tilde{e}_{i_2}, \ldots, \tilde{e}_{i_n}). \tag{8}$$

Поэтому можно определить интеграл от ступенчатой дифференциальной формы по векторной мере $\tilde{\mu}_M$ [4, Ch. II, § 7, п. 1]:

$$\text{если } \omega = \sum_{k=1}^p \varphi_k \chi_{E_k}, \text{ то } \int \omega\, d\tilde{\mu}_M = \sum_{k=1}^p \tilde{\varphi}_k\big(\tilde{\mu}_M(E_k)\big). \tag{9}$$

Для определения интеграла не только от ступенчатых дифференциальных форм нужны дополнительные свойства векторной меры. Если рассмотреть сопряжённые нормы в пространствах внешних n-форм и n-векторов, то для любой внешней n-формы φ и n-вектора v имеет место неравенство $\|\tilde{\varphi}(v)\| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|v\|$ ($\tilde{\varphi}$ — линейный функционал, соответствующий форме φ). Кроме того, $\mathfrak{R}_M$ является δ-кольцом и мера $\tilde{\mu}_M$ имеет конечную вариацию. Таким образом, применима теория интегрирования вектор-функций по векторной мере (см. [4, Ch. II, § 8]). Следующее определение является переформулировкой общего определения из [4] для случая дифференциальных форм и меры $\tilde{\mu}_M$.

Определение 3. *Пусть M — ориентированное вещественно n-мерное многообразие с локально конечными вариациями, вложенное в $\mathbb{C}^m$ ($m \geqslant n$). Дифференциальная форма $\omega : M \times (\mathbb{C}^m)^n \to \mathbb{C}$ называется $\tilde{\mu}_M$-интегрируемой, если существует последовательность $\{\omega_k\}_{k=1}^\infty$ ступенчатых дифференциальных форм такая, что*

1) $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность Коши, т. е. $\lim\limits_{k,l\to\infty} \int \|\omega_k - \omega_l\|\, d|\tilde{\mu}_M| = 0$;

2) ω_k сходятся к ω почти всюду по мере $|\tilde{\mu}_M|$.

Тогда полагаем

$$\int \omega\, d\tilde{\mu}_M = \lim_{k\to\infty} \int \omega_k\, d\tilde{\mu}_M.$$

Если $A \in \bigcap\limits_{\alpha} (\mathfrak{A}_\alpha^+ \cap \mathfrak{A}_\alpha^-)$ и дифференциальная форма $\omega \cdot \chi_A$ интегрируема, то говорят, что форма ω интегрируема на множестве A и $\int\limits_A \omega\, d\tilde{\mu}_M = \int \omega\chi_A\, d\tilde{\mu}_M$.

Теорема 2. *Пусть M — ориентированное n-мерное многообразие в $\mathbb{C}^m$ с локально конечными вариациями, множество $K \subset M$ компактно и сужение дифференциальной формы $\omega|_K$ непрерывно на K. Тогда ω интегрируема на K.*

Доказательство буквально повторяет доказательство теоремы 7 из [2] (заменяя $|\mu_M|$ на $|\tilde{\mu}_M|$). ■

Теорема 3. *Пусть M — ориентированное многообразие вещественной размерности n, гладко вложенное в $\mathbb{C}^m$ $(m \geqslant n)$. Тогда*

1) M — многообразие с локально конечными вариациями;

2) пусть $E \subset U = f(\mathbb{R}^n)$, f — положительная параметризация (диффеоморфизм класса $C^{(1)}$) окрестности $U \subset M$; если E — малое α^+- и α^--измеримое для всех $\alpha = \{i_1, \ldots, i_n\}$, то $f^{-1}(E)$ измеримо по Лебегу;

3) если дифференциальная форма $\omega(z) = \sum\limits_{\beta} a_\beta(z)\, dz_\beta$ интегрируема на E по мере $\tilde{\mu}_M$, имеем

$$\int\limits_E \omega\, d\tilde{\mu}_M = \int\limits_{f^{-1}(E)} \sum_\beta (a_\beta \circ f) \cdot \det f'_\beta\, d\lambda_n. \qquad (*)$$

Доказательство. Утверждения 1 и 2 доказаны в [3, теорема 2, п. 1 и 2]. Докажем формулу $(*)$.

1) Пусть $E \subset U = f(\mathbb{R}^n)$, $E \in \mathfrak{R}_M$, $\omega = dz_{k_1} \wedge \ldots \wedge dz_{k_n}$ (постоянная дифференциальная форма). Докажем, что

$$\int\limits_E \omega\, d\tilde{\mu}_M = \int\limits_{f^{-1}(E)} \det f'_\beta\, d\lambda_n, \quad \beta = \{k_1, \ldots, k_n\}.$$

По определению интеграла от ступенчатой дифференциальной формы выполняется

$$\int\limits_E \omega\, d\tilde{\mu}_M = \int \omega\chi_E\, d\tilde{\mu}_M = \tilde{\varphi}\big(\tilde{\mu}_M(E)\big).$$

Так как функционал $\tilde{\varphi}$ $\mathbb{C}$-линеен, получаем (см. (2))

$$\tilde{\varphi}\big(\tilde{\mu}_M(E)\big) = \sum_\beta \bar{\mu}_\beta(E)\tilde{\varphi}(\tilde{e}_\beta), \quad \beta = \{j_1, \ldots, j_n\},\ 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_n \leqslant m. \qquad (10)$$

По (2) имеем

$$\tilde{\varphi}(\tilde{e}_{j_1} \wedge \tilde{e}_{j_2} \wedge \ldots \wedge \tilde{e}_{j_n}) = \varphi(\tilde{e}_{j_1}, \tilde{e}_{j_2}, \ldots, \tilde{e}_{j_n}) = (dz_{k_1} \wedge \ldots \wedge dz_{k_n})(\tilde{e}_{j_1}, \tilde{e}_{j_2}, \ldots, \tilde{e}_{j_n}).$$

По лемме, аналогичной лемме 2 из [1, т. III, гл. 2, § 2] (для внешней формы над $\mathbb{C}$), получаем

$$(dz_{k_1} \wedge \ldots \wedge dz_{k_n})(\tilde{e}_{j_1}, \ldots, \tilde{e}_{j_n}) = \begin{cases} 1, \text{ если } \{j_1, \ldots, j_n\} = \{k_1, \ldots, k_n\}, \\ 0, \text{ если } \{j_1, \ldots, j_n\} \neq \{k_1, \ldots, k_n\} \end{cases}$$

(при этом $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ и $j_1 < j_2 < \ldots < j_n$). Поэтому в сумме (10) ненулевым будет только одно слагаемое. Получим

$$\int\limits_E \omega\, d\tilde{\mu}_M = \tilde{\varphi}\big(\tilde{\mu}_M(E)\big) = \bar{\mu}_{\{k_1,\ldots,k_n\}}(E) = \int\limits_{f^{-1}(E)} \det f'_\beta \, d\lambda_n \quad \text{(по теореме 1)}.$$

2) Пусть $E \subset U = f(\mathbb{R}^n)$, $E \in \bigcap\limits_\alpha (\mathfrak{A}^+_\alpha \cap \mathfrak{A}^-_\alpha)$, ω — ступенчатая дифференциальная форма. Докажем для нее формулу $(*)$.

Справедливо представление $\omega = \sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_k \chi_{E_k}$, где φ_k — постоянные дифференциальные формы, все E_k из кольца $\mathfrak{R}_M$. Тогда выполняется

$$\omega\chi_E = \sum_{k=1}^{p} \varphi_k \chi_{E_k} \cdot \chi_E = \sum_{k=1}^{p} \varphi_k \chi_{E_k \cap E}, \quad E_k \cap E \in \bigcap_\alpha (\mathfrak{A}^+_\alpha \cap \mathfrak{A}^-_\alpha)$$

$$\text{и} \quad \mu^+_\alpha(E_k \cap E) \leqslant \mu^+_\alpha(E_k) < \infty, \quad \mu^-_\alpha(E_k \cap E) \leqslant \mu^-_\alpha(E_k) < \infty, \ \text{т. е. } E_k \cap E \in \mathfrak{R}_M$$

и форма $\omega\chi_E$ также ступенчатая. Поэтому без ограничения общности считаем, что $\omega = \omega\chi_E$.

Итак, $\omega = \sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_k \chi_{E_k}$, где множества E_k можно считать дизъюнктными (см. [4, Ch. II, § 6, п. 1]) и $E_k \subset E$. Пусть $\varphi_k = \sum\limits_\beta a_{\beta k} dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_n}$, тогда, если $z \in E_k$, имеем $\omega(z) = \sum\limits_\beta a_{\beta k} dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_n}$, а если $z \in E \setminus \Big(\bigcup\limits_{k=1}^{p} E_k\Big)$, следовательно $\omega(z) = 0$. Таким образом,

$$\text{если} \ \ \omega(z) = \sum_\beta a_\beta(z)\, dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_n}, \ \text{ то } \ a_\beta(z) = \begin{cases} a_{\beta k}, \text{ если } z \in E_k, \\ 0, \text{ если } z \in E \setminus \Big(\bigcup\limits_{k=1}^{p} E_k\Big). \end{cases}$$

Ввиду линейности интеграла, используя доказанное для формы $dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_n}$, получим

$$\int \varphi_k \chi_{E_k} d\tilde{\mu}_M = \int\limits_{E_k} \left(\sum_\beta a_{\beta k} dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_n} \right) d\tilde{\mu}_M = \sum_\beta a_{\beta k} \int\limits_{E_k} (dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_n})\, d\tilde{\mu}_M =$$

$$= \sum_\beta a_{\beta k} \int\limits_{f^{-1}(E_k)} \det f'_\beta \, d\lambda_n = \int\limits_{f^{-1}(E_k)} \left(\sum_\beta a_{\beta k} \cdot \det f'_\beta \right) d\lambda_n$$

и, поскольку $f \in C^{(1)}(\mathbb{R}^n)$, подынтегральная функция непрерывна.

Если $t \in f^{-1}(E_k)$, имеем $f(t) \in E_k$, т. е. $a_\beta(f(t)) = a_{\beta k}$. Тогда справедливо

$$\int\limits_E \omega\, d\tilde{\mu}_M = \int \left(\sum_{k=1}^{p} \varphi_k \chi_{E_k} \right) d\tilde{\mu}_M = \sum_{k=1}^{p} \int \varphi_k \chi_{E_k} d\tilde{\mu}_M =$$
$$= \sum_{k=1}^{p} \int\limits_{f^{-1}(E_k)} \left(\sum_\beta a_\beta(f(t)) \cdot \det f'_\beta(t) \right) d\lambda_n.$$

Если $t \in f^{-1}(E) \setminus \left(\bigcup\limits_{k=1}^{p} f^{-1}(E_k) \right) = f^{-1} \left(E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{p} E_k \right)$, получаем $a_\beta(f(t)) = 0$ для всех β. Используя дизъюнктность множеств $f^{-1}(E_k)$, получим

$$\sum_{k=1}^{p} \int\limits_{f^{-1}(E_k)} \left(\sum_\beta a_\beta(f(t)) \det f'_\beta(t) \right) d\lambda_n = \int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{p} f^{-1}(E_k)} \left(\sum_\beta a_\beta(f(t)) \det f'_\beta(t) \right) d\lambda_n +$$
$$+ \int\limits_{f^{-1}(E) \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{p} f^{-1}(E_k)} \left(\sum_\beta a_\beta(f(t)) \det f'_\beta(t) \right) d\lambda_n = \int\limits_{f^{-1}(E)} \left(\sum_\beta (a_\beta \circ f) \det f'_\beta \right) d\lambda_n,$$

и формула $(*)$ доказана для ступенчатой дифференциальной формы. Отметим, что подынтегральная функция непрерывна на измеримых по Лебегу множествах $f^{-1}(E_k)$ и $f^{-1}(E) \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{p} f^{-1}(E_k)$, т. е. измерима по Лебегу.

3) Пусть ω — дифференциальная форма, интегрируемая на $E \subset U = f(\mathbb{R}^n)$. Тогда, по определению, существует последовательность $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ ступенчатых форм такая, что $\omega_k(z) \to \omega(z)$ почти всюду по мере $|\tilde{\mu}_M|$. Поскольку пространство внешних форм конечномерно, сходимость $\omega_k(z) \to \omega(z)$ равносильна покоординатной сходимости в любом базисе. Это означает следующее: если $\omega_k(z) = \sum\limits_\beta a_{\beta k}(z)\, dz_\beta$, $\omega(z) = \sum\limits_\beta a_\beta(z)\, dz_\beta$, тогда для любого β $a_{\beta k}(z) \to a_\beta(z)$ почти всюду по мере $|\tilde{\mu}_M|$. Докажем, что функции $a_{\beta k}(f(t)) \det f'_\beta(t)$ сходятся к $a_\beta(f(t)) \det f'_\beta(t)$ почти всюду по мере Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Обозначим $E_\beta = \{z \in E \mid a_{\beta k}(z) \not\to a_\beta(z)\}$, тогда $E_\beta \in \mathfrak{R}_M$, $\quad |\tilde{\mu}_M|(E_\beta) = 0$.

Пусть $P_\beta = \left\{ t \in \mathbb{R}^n \mid a_{\beta k}(f(t)) \det f'_\beta(t) \not\to a_\beta(f(t)) \det f'_\beta(t) \right\}$. Тогда

$$t \in P_\beta \Leftrightarrow a_{\beta k}(f(t)) \not\to a_\beta(f(t)) \text{ и } \det f'_\beta(t) \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(t) \in E_\beta \text{ и } \det f'_\beta(t) \neq 0 \Leftrightarrow t \in f^{-1}(E_\beta) \cap \left\{ t \in \mathbb{R}^n \mid \det f'_\beta(t) \neq 0 \right\}.$$

Поскольку $E_\beta \in \mathfrak{R}_M$, множество $f^{-1}(E_\beta)$ измеримо по мере Лебега (по теореме 1). Функция $\det f'_\beta(t)$ непрерывна, следовательно измерима по мере Лебега, поэтому множество $\{t \in \mathbb{R}^n \mid \det f'_\beta(t) \neq 0\}$ тоже измеримо. Получили, что

$$P_\beta = f^{-1}(E_\beta) \cap \left\{ t \in \mathbb{R}^n \mid \det f'_\beta(t) \neq 0 \right\} \quad \text{измеримо.}$$

По определению вариации меры

$$|\tilde{\mu}_M|(E_\beta) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{p} \|\tilde{\mu}_M(E_k)\| \;\Big|\; \bigcup_{k=1}^{p} E_k \subset E_\beta,\ E_k \in \mathfrak{R}_M \text{ и дизъюнктны} \right\} = 0.$$

Отсюда получаем, что для любого $E' \subset E_\beta$, $E' \in \mathfrak{R}_M$ должно быть $\tilde{\mu}_M(E') = \mathbf{0}$, т. е. $\bar{\mu}_\beta(E') = 0$ для любого β, а тогда $|\bar{\mu}_\beta|(E_\beta) = 0$. По теореме 1

$$|\bar{\mu}_\beta|(E_\beta) = \int\limits_{f^{-1}(E_\beta)} |\det f'_\beta|\, d\lambda_n = \int\limits_{P_\beta} |\det f'_\beta|\, d\lambda_n + \int\limits_{f^{-1}(E_\beta)\setminus P_\beta} |\det f'_\beta|\, d\lambda_n.$$

Поскольку вне множества P_β $\det f'_\beta = 0$,

$$|\bar{\mu}_\beta|(E_\beta) = \int\limits_{P_\beta} |\det f'_\beta|\, d\lambda_n = 0, \text{ на } P_\beta \quad |\det f'_\beta(t)| > 0 \Longrightarrow \lambda_n(P_\beta) = 0,$$

что и требовалось.

По замечанию в конце доказательства п. 2 все функции $a_{\beta k}(f(t)) \det f'_\beta(t)$ измеримы. Из сходимости $a_{\beta k}(f(t)) \det f'_\beta(t) \to a_\beta(f(t)) \det f'_\beta(t)$ почти всюду следует, что функции $(a_\beta \circ f) \det f'_\beta$ и $|(a_{\beta k} \circ f) \det f'_\beta - (a_\beta \circ f) \det f'_\beta|$ измеримы по Лебегу на $f^{-1}(E)$.

4) Докажем $\int\limits_E |a_{\beta k} - a_\beta|\, d|\bar{\mu}_\beta| = \int\limits_{f^{-1}(E)} |(a_{\beta k} \circ f) - (a_\beta \circ f)| \cdot |\det f'_\beta|\, d\lambda_n$.

Функция $a_{\beta k}$ — ступенчатая, измеримая по отношению к σ-алгебре $\bigcap\limits_\alpha (\mathfrak{A}^+_\alpha \cap \mathfrak{A}^-_\alpha)$, и $a_{\beta k}(z) \to a_\beta(z)$ почти всюду по мере $|\tilde{\mu}_M|$ (определенной на той же σ-алгебре), тогда a_β и $|a_{\beta k} - a_\beta|$ тоже измеримы. Мера $|\bar{\mu}_\beta|$ определена на $\bigcap\limits_{P(\alpha)=\beta} (\mathfrak{A}^+_\alpha \cap \mathfrak{A}^-_\alpha) \supset \bigcap\limits_\alpha (\mathfrak{A}^+_\alpha \cap \mathfrak{A}^-_\alpha)$, поэтому имеет смысл интеграл $\int\limits_E |a_{\beta k} - a_\beta|\, d|\bar{\mu}_\beta|$.

Если h — ступенчатая функция, $h = \sum\limits_{i=1}^{p} c_i \chi_{E_i}$, где все $c_i \geqslant 0$, E_i дизъюнктны, принадлежат σ-алгебре $\bigcap\limits_\alpha (\mathfrak{A}^+_\alpha \cap \mathfrak{A}^-_\alpha)$ и $E = \bigcup\limits_{i=1}^{p} E_i$, по теореме 1 имеем

$$\int\limits_E h\, d|\bar{\mu}_\beta| = \sum_{i=1}^{p} c_i |\bar{\mu}_\beta|(E_i) = \sum_{i=1}^{p} \left(c_i \int\limits_{f^{-1}(E_i)} |\det f'_\beta|\, d\lambda_n \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \int\limits_{f^{-1}(E_i)} h(f(t)) |\det f'_\beta(t)|\, d\lambda_n = \int\limits_{f^{-1}(E)} h(f(t)) |\det f'_\beta(t)|\, d\lambda_n$$

(поскольку при $t \in f^{-1}(E_i)$ $f(t) \in E_i \Rightarrow h(f(t)) = c_i$).

Неотрицательная измеримая по всем мерам μ^+_α, μ^-_α функция $|a_{\beta k} - a_\beta|$ на E является пределом возрастающей последовательности неотрицательных ступенчатых функций, т. е.

$$\forall\, z \in E \quad 0 \leqslant h_j(z) \leqslant h_{j+1}(z), \quad h_j(z) \to |a_{\beta k}(z) - a_\beta(z)| \quad (j \to \infty)$$

(можно положить $h_j(z) = \frac{k}{2^j}$, если $\frac{k}{2^j} \leqslant |a_{\beta k}(z) - a_\beta(z)| < \frac{k+1}{2^j}$, k — целое, $k < j \cdot 2^j$, и $h_j(z) = j$, если $|a_{\beta k}(z) - a_\beta(z)| \geqslant j$). Все свойства последовательности $\{h_j\}_{j=1}^{\infty}$ легко проверяются. Тогда очевидно

$$\forall\, t \in f^{-1}(E) \quad 0 \leqslant h_1(f(t))|\det f'_\beta(t)| \leqslant h_2(f(t))|\det f'_\beta(t)| \leqslant \ldots,$$
$$h_j(f(t))|\det f'_\beta(t)| \to |a_{\beta k}(f(t)) - a_\beta(f(t))| \cdot |\det f'_\beta(t)|$$

и из равенства $\int\limits_E h_j\, d|\bar{\mu}_\beta| = \int\limits_{f^{-1}(E)} (h_j \circ f)|\det f'_\beta|\, d\lambda_n$ предельным переходом по теореме Леви о монотонной сходимости получаем

$$\int\limits_E |a_{\beta k} - a_\beta|\, d|\bar{\mu}_\beta| = \int\limits_{f^{-1}(E)} |(a_{\beta k} \circ f) - (a_\beta \circ f)| \cdot |\det f'_\beta|\, d\lambda_n.$$

5) Обозначим $g_k(t) = \sum\limits_\beta a_{\beta k}(f(t)) \det f'_\beta(t)$, $g(t) = \sum\limits_\beta a_\beta(f(t)) \det f'_\beta(t)$. Функции $(a_\beta \circ f)\det f'_\beta$ измеримы по Лебегу (по п. 3), поэтому и функция g измерима. По замечанию к п. 2 функции g_k измеримы, поэтому и $|g_k - g|$ измерима и неотрицательна, т. е. интеграл $\int\limits_{f^{-1}(E)} |g_k - g|\, d\lambda_n$ имеет смысл. Докажем, что $\int\limits_{f^{-1}(E)} |g_k - g|\, d\lambda_n \to 0$ при $k \to \infty$.

$$\int\limits_{f^{-1}(E)} |g_k - g|\, d\lambda_n = \int\limits_{f^{-1}(E)} \left| \sum_\beta (a_{\beta k} \circ f) \det f'_\beta - \sum_\beta (a_\beta \circ f) \det f'_\beta \right| d\lambda_n \leqslant$$
$$\leqslant \sum_\beta \int\limits_{f^{-1}(E)} |(a_{\beta k} \circ f) - (a_\beta \circ f)| \cdot |\det f'_\beta|\, d\lambda_n.$$

По п. 4 имеем

$$\sum_\beta \int\limits_{f^{-1}(E)} |(a_{\beta k} \circ f) - (a_\beta \circ f)| \cdot |\det f'_\beta|\, d\lambda_n = \sum_\beta \int\limits_E |a_{\beta k} - a_\beta|\, d|\bar{\mu}_\beta|.$$

По определению меры $\tilde{\mu}_M$ для любого $A \in \mathfrak{R}_M$ $\bar{\mu}_\beta(A)$ — координата n-вектора $\tilde{\mu}_M(A)$ в базисе $\{\tilde{e}_\beta\}$. Поскольку отображение, сопоставляющее n-вектору его координату, линейно и непрерывно по любой норме в пространстве n-векторов (оно конечномерно), существует константа $C_1 > 0$ такая, что для любого β и любого $A \in \mathfrak{R}_M$ справедливо неравенство $|\bar{\mu}_\beta(A)| \leqslant C_1 \|\tilde{\mu}_M(A)\|$. Тогда по определению вариации меры легко проверяется, что для любого $A \in \bigcap\limits_\alpha (\mathfrak{A}^+_\alpha \cap \mathfrak{A}^-_\alpha)$ $\quad |\bar{\mu}_\beta|(A) \leqslant C_1 |\tilde{\mu}_M|(A)$, а тогда

$$\sum_\beta \int\limits_E |a_{\beta k} - a_\beta|\, d|\bar{\mu}_\beta| \leqslant C_1 \int\limits_E \sum_\beta |a_{\beta k} - a_\beta|\, d|\tilde{\mu}_M|,$$

$(a_{\beta k}(z) - a_\beta(z))$ — это коэффициент внешней формы $(\omega_k(z) - \omega(z))$. Отображение, сопоставляющее внешней форме набор ее коэффициентов, линейно и непрерывно (пространство внешних форм и пространство коэффициентов конечномерны). Сумма абсолютных величин координат вектора является нормой в конечномерном пространстве, поэтому для любой нормы в пространстве внешних форм существует константа

$C_2 > 0$ такая, что для любой внешней формы $\varphi = \sum\limits_\beta a_\beta\, dz_\beta$ имеет место неравенство $\sum\limits_\beta |a_\beta| \leqslant C_2\|\varphi\|$, в частности

$$\sum_\beta |a_{\beta k}(z) - a_\beta(z)| \leqslant C_2\|\omega_k(z) - \omega(z)\|.$$

Пространство интегрируемых дифференциальных форм линейно [4, Ch. II, § 8, п. 1, proposition 1], поэтому $(\omega_k - \omega)$ интегрируема на E по мере $\tilde{\mu}_M$, а тогда $\|\omega_k - \omega\|$ интегрируема по мере $|\tilde{\mu}_M|$ [там же, proposition 4]. Тогда имеем

$$\int\limits_E \sum_\beta |a_{\beta k} - a_\beta|\, d|\tilde{\mu}_M| \leqslant C_2 \int\limits_E \|\omega_k - \omega\|\, d|\tilde{\mu}_M|$$

и, используя предыдущие неравенства этого пункта, получаем

$$\int\limits_{f^{-1}(E)} |g_k - g|\, d\lambda_n \leqslant \sum_\beta \int\limits_{f^{-1}(E)} |(a_{\beta k} \circ f) - (a_\beta \circ f)| \cdot |\det f'_\beta|\, d\lambda_n =$$
$$= \sum_\beta \int\limits_E |a_{\beta k} - a_\beta|\, d|\bar{\mu}_\beta| \leqslant C_1 \int\limits_E \sum_\beta |a_{\beta k} - a_\beta|\, d|\tilde{\mu}_M| \leqslant C_1 C_2 \int\limits_E \|\omega_k - \omega\|\, d|\tilde{\mu}_M|.$$

Из этого неравенства следует, что функция g суммируема на $f^{-1}(E)$ по мере Лебега. Поскольку $\{\omega_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность Коши и $\omega_k(z) \to \omega(z)$ почти всюду по мере $|\tilde{\mu}_M|$, то [4, Ch. II, § 8, п. 2, proposition 12]

$$\int\limits_E \|\omega_k - \omega\|\, d|\tilde{\mu}_M| \to 0, \quad \text{т. е.} \quad \int\limits_{f^{-1}(E)} |g_k - g|\, d\lambda_n \to 0.$$

Тогда справедливо

$$\int\limits_{f^{-1}(E)} g\, d\lambda_n = \int\limits_{f^{-1}(E)} \sum_\beta (a_\beta \circ f) \det f'_\beta\, d\lambda_n =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{f^{-1}(E)} g_k\, d\lambda_n = \lim_{k\to\infty} \int\limits_E \omega_k\, d\tilde{\mu}_M = \int\limits_E \omega\, d\tilde{\mu}_M$$

(по п. 2 для ступенчатых форм ω_k и определению интеграла от формы ω). ■

Литература

1. *Грауэрт Г.* Дифференциальное и интегральное исчисление / Г. Грауэрт, И. Либ, В. Фишер. М.: Мир, 1971. 680 с.

2. *Потепун А. В.* Интегрирование дифференциальных форм на многообразиях с локально конечными вариациями, часть I // Записки научных семинаров ПОМИ, 2005. Т. 327. С. 168–206.

3. *Потепун А. В.* Интегрирование дифференциальных форм на многообразиях с локально конечными вариациями, часть II // Записки научных семинаров ПОМИ, 2006. Т. 333. С. 66–85.

4. *Dinculeanu N.* Vector measures. Berlin: Veb Deutscher Verlag von Wissenschaften, 1966. 432 p.

5. *Бурбаки Н.* Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. М.: Физматгиз, 1962. 516 с.

Статья поступила в редакцию 22 октября 2015 г.

Сведения об авторе

Потепун Алексей Витальевич — кандидат физико-математических наук, доцент; apotepun@pochta.tvoe.tv

COMPLEX VECTOR MEASURE AND INTEGRAL OVER MANIFOLDS WITH LOCALLY FINITE VARIATIONS

Aleksey V. Potepun

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; apotepun@pochta.tvoe.tv

It is well known that one can integrate any compactly supported continuous complex differential n-form over real-n-dimensional C^1-manifolds in $\mathbb{C}^m$ $(m \geqslant n)$. For $n = 1$ the integral may be defined over any locally rectifiable curve. Another generalization is the theory of currents (linear functionals on the space of compactly supported C^∞-differential forms). The theme of the article is integration of measurable complex differential $(n, 0)$-forms (without $d\bar{z}_j$) over real-n-dimensional C^0-manifolds in $\mathbb{C}^m$ with locally finite n-dimensional variations (a generalization of locally rectifiable curves to dimension $n > 1$). The last result states that a real-n-dimensional manifold, C^1-embedded in $\mathbb{C}^m$, has locally finite variations and the integral of measurable complex differential $(n, 0)$-form determined in the article may be calculated by well known formula. Refs 5.

Keywords: integration of differential form, complex vector measure, n-vector, manifold with locally finite variations.

References

1. Grauert H., Lieb I., Fischer W., *Differential- und Integralrechnung* (Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, **III**, 1967) [in German].

2. Potepun A. V., “Integration of differential forms on manifolds with locally finite variations. Part I”, *Zapiski nauchnyh seminarov POMI* **327**, 168–206 (2005) [in Russian].

3. Potepun A. V., “Integration of differential forms on manifolds with locally finite variations. Part II”, *Zapiski nauchnyh seminarov POMI* **333**, 66–85 (2006) [in Russian].

4. Dinculeanu N., *Vector measures* (ed. N. Dinculeanu, Dt. Verlag d. Wiss., Berlin, 1967, 432 p.).

5. Bourbaki N., *Algebra. Chapters I–III* (Hermann, Paris, France, 1974).