

МЕХАНИКА

К 80-ЛЕТИЮ П. Е. ТОВСТИКА

**ВКЛАД П. Е. ТОВСТИКА В РАЗВИТИЕ
МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА**

28 декабря 2015 года исполнилось 80 лет одному из ведущих ученых Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ), заслуженному деятелю науки РФ, лауреату Государственной премии РФ, Почетному профессору СПбГУ, заведующему кафедрой теоретической и прикладной механики математико-механического факультета, доктору физико-математических наук, профессору Петру Евгеньевичу Товстику.

Вся его жизнь неразрывно связана с математико-механическим факультетом СПбГУ. В 1958 году Петр Евгеньевич с отличием окончил факультет и продолжил обучение в аспирантуре. После защиты в 1963 году кандидатской диссертации он работал в лаборатории вибраций НИИ Математики и Механики (НИИММ) Ленинградского государственного университета (ЛГУ). Защитив в 1968 году докторскую диссертацию, он стал доцентом, а затем профессором кафедры теоретической и прикладной механики. С 1978 года он заведует этой кафедрой.

Первые научные исследования, выполненные П. Е. Товстиком в лаборатории вибраций НИИММ под руководством заведующего лабораторией доцента Г. Н. Бухаринова, были посвящены колебаниям винтовых пружин. Работы Товстика по асимптотическому анализу уравнений колебаний криволинейного стержня, имеющего форму винтовой линии, позволили обосновать некоторые явления, наблюдаемые в эксперименте.

Научные результаты, полученные Петром Евгеньевичем, принадлежат к различным областям механики. Особенно велик его вклад в теорию колебаний и устойчиво-



сти тонких оболочек. Для научного стиля П. Е. Товстика характерна умелая постановка задач и изящное их решение с использованием современного математического аппарата. Общие теоретические результаты в его работах неизменно сопровождаются решением доведенных до числа конкретных задач. При этом следует отметить, что Петр Евгеньевич хорошо знаком с современными компьютерными технологиями и собственноручно составил и отладил множество программ.

Свободные колебания тонких оболочек. Исследования П. Е. Товстика в области колебаний оболочек вращения внесли существенный вклад не только в теорию оболочек, но и в теорию асимптотического интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Во многих интересных для практики случаях классическая асимптотика оказывается непригодной. Это происходит при наличии на промежутке интегрирования так называемых точек поворота, в которых обращается в ноль один из коэффициентов уравнения колебаний. Основное внимание в работах Петра Евгеньевича было уделено определению структуры решения в окрестности точек поворота.

В случае осесимметричных колебаний асимптотические выражения для интегралов в окрестности точек поворота построены с помощью эталонных функций, не зависящих от формы оболочки и частоты колебаний. На основании полученных результатов был разработан более простой, чем известные ранее, общий метод асимптотического интегрирования целого класса дифференциальных уравнений, включающего уравнение Орра—Зоммерфельда. Найденные асимптотические разложения интегралов использованы для определения частот и форм осесимметричных колебаний оболочки вращения. При неосесимметричных колебаниях оболочки вращения асимптотическое поведение интегралов существенно зависит от числа волн в окружном направлении. В случае небольшого числа волн точки поворота будут такими же, как и при осесимметричных колебаниях. При большом числе волн происходит качественное изменение асимптотических свойств интегралов. Для этого случая проведен подробный анализ решений, получены приближенные уравнения для определения частот колебаний как при наличии, так и при отсутствии точек поворота.

Перечисленные результаты, а также исследования Петра Евгеньевича по устойчивости оболочек вращения вошли в его докторскую диссертацию «Свободные колебания и устойчивость оболочек вращения». В 1970 году за цикл работ по теории оболочек он был удостоен первой премии ЛГУ за научные труды.

В дальнейшем были изучены низкочастотные и высокочастотные колебания оболочек вращения. Низкочастотными называются колебания, частоты которых стремятся к нулю вместе с толщиной оболочки. У достаточно тонкой оболочки эти частоты образуют нижнюю часть спектра, представляющую обычно наибольший интерес для приложений. Для высокочастотных колебаний частоты стремятся к бесконечности при стремлении толщины оболочки к нулю. Получены приближенные асимптотические формулы для определения частот и форм колебаний. Кратко изложенные здесь результаты исследований П. Е. Товстика по теории колебаний оболочек вращения включены им в книгу [1], опубликованную в 1979 году.

В середине 1980-х годов Петром Евгеньевичем был разработан новый эффективный метод приближенного определения низших частот колебаний некруговых цилиндрических и конических оболочек. С его помощью получены решения многих задач теории колебаний оболочек, для которых характерна локализация форм колебаний вблизи так называемых наиболее слабых образующих. В частности, для цилиндрической оболочки с косо срезанным краем наиболее слабой оказалась наиболее длинная

образующая, а для оболочки в форме эллиптического цилиндра наиболее слабыми являются две образующие, проходящие через концы меньшей оси эллипса.

В указанных задачах, как правило, невозможно провести разделение переменных и свести решение уравнений в частных производных к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Петр Евгеньевич получил приближенное асимптотическое решение краевой задачи для системы уравнений в частных производных путем решения последовательности краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Применению и развитию этого метода посвящены докторские диссертации его учеников Г. И. Михасева и С. Б. Филиппова. Исследования П. Е. Товстика и Г. И. Михасева, посвященные локализации колебаний и волн в тонких оболочках, отражены в монографии [2], которая содержит много новых интересных результатов.

Линейная теория устойчивости тонких оболочек. Задачи устойчивости, рассматриваемые в линейном приближении, по используемому математическому аппарату близки к задачам о свободных колебаниях. И те и другие сводятся к решению краевых задач на собственные значения. Основное различие заключается в том, что в задачах устойчивости обычно представляют интерес лишь наименьшие собственные значения.

В случае безмоментного начального состояния проведены оценка порядка критических нагрузок и качественный анализ форм потери устойчивости для произвольной гладкой оболочки. Эти оценки служат ориентиром при построении асимптотических разложений и оказываются различными для оболочек положительной, нулевой и отрицательной гауссовой кривизны. Также проведен анализ зависимости порядка критической нагрузки от закрепления краев оболочки.

Размеры и расположение вмятин, возникающих на срединной поверхности оболочки при потере устойчивости, зависят от функций, определяющих радиусы кривизны, толщину, начальные безмоментные усилия и др. В классических задачах теории устойчивости оболочек эти функции считаются постоянными, а вмятины покрывают всю срединную поверхность оболочки. Если же определяющие функции меняются при переходе от одной точки срединной поверхности к другой ее точке, то возникает локализация форм потери устойчивости.

В работах П. Е. Товстика изучены три типа локализации. Первый из них встречается в задачах с разделяющимися переменными. Так, например, выпуклые оболочки вращения могут иметь форму потери устойчивости, локализованную между двумя точками поворота. К первому типу относится и задача устойчивости цилиндрической оболочки при неоднородном осевом сжатии, для которой локализация происходит вблизи образующей цилиндра. Асимптотические разложения решений этих задач получены с помощью одномерного варианта алгоритма В. П. Маслова.

При втором типе локализации малые вмятины сосредоточены вблизи наиболее слабой точки на срединной поверхности. К этому типу относятся задачи устойчивости оболочек при комбинированном нагружении и задача об изгибе моментом цилиндрической оболочки переменной толщины. Асимптотический анализ, основанный на двумерном варианте алгоритма В. П. Маслова, позволил получить в явном виде приближенные формулы для критических нагрузок и обнаружить интересные качественные особенности форм потери устойчивости.

Третий тип локализации возможен у оболочек нулевой гауссовой кривизны (конических и цилиндрических) и сопровождается образованием вмятин, вытянутых вдоль наиболее слабой образующей. Новый метод асимптотического интегрирования, предложенный Петром Евгеньевичем, позволил получить простые приближенные ре-

шения множества актуальных существенно двумерных задач теории устойчивости оболочек, для которых невозможно провести разделение переменных. Ранее для этих задач были известны лишь отдельные численные результаты.

В работах Петра Евгеньевича также рассмотрены такие задачи потери устойчивости, при которых вмятины локализуются в окрестности слабо закрепленного края и экспоненциально убывают при удалении от него. Впервые эффект снижения критической нагрузки при сжатии пластины в связи с наличием свободного края был обнаружен академиком А. Ю. Ишлинским. Для оболочек этот эффект проявляется значительно сильнее, чем для пластин.

Локальные формы потери устойчивости анизотропных оболочек исследованы в работе [3]. Асимптотическим методом найдены критические нагрузки и формы потери устойчивости.

Основные результаты своих исследований по теории устойчивости оболочек Петр Евгеньевич изложил в монографиях [4] и [5]. В 1998 году за труды по теории оболочек ему присуждена Государственная премия РФ. В том же году П. Е. Товстику присвоено звание «Заслуженный деятель науки РФ».

Нелинейная теория оболочек. Погрешность линейной теории оболочек имеет порядок безразмерной толщины оболочки. В нелинейных задачах погрешность теории оболочек возрастает с увеличением деформаций, причем основную неточность вносят соотношения упругости, связывающие усилия и моменты с деформациями. В работах П. Е. Товстика из трехмерных уравнений теории упругости выведены уточненные соотношения упругости, при использовании которых погрешность нелинейной теории оболочек имеет порядок безразмерной толщины оболочки в достаточно широком диапазоне изменения деформаций. Уточненные соотношения упругости позволили, в частности, исследовать большие осесимметричные деформации оболочки вращения.

Уточненные соотношения упругости являются новым фундаментальным результатом нелинейной теории оболочек. Они вошли в монографию [6], за которую ее авторам, в том числе Петру Евгеньевичу, в 2002 году присуждена премия СПбГУ «За научные труды» первой степени.

Прикладные задачи. Научные интересы П. Е. Товстика никогда не ограничивались исследованиями в области теории оболочек. Долгие годы он руководил многочисленными и разнообразными хозяйственными работами, выполняемыми в том числе и по постановлениям правительства СССР. Удивительная интуиция помогает ему сразу же выделить основные черты изучаемой механической системы и создать для нее адекватную математическую модель. Многие его труды посвящены решению самых разнообразных прикладных задач механики. Отметим здесь только некоторые из них.

В рамках многолетнего сотрудничества с Государственным оптическим институтом выполнен большой цикл работ, связанных с расчетом облегченных металлических зеркал телескопов. Зеркало телескопа моделировалось кольцевой слоистой пластиной переменной толщины. Для успешной эксплуатации телескопа должны быть выполнены очень жесткие ограничения на прогиб отражающей поверхности зеркала, который существенно зависит от расположения точек крепления опор зеркала. Разработаны приближенные методы расчета деформации зеркал, а также методы определения оптимального расположения опор. Основные результаты этих исследований отражены в монографии [7].

В 1985 году Петр Евгеньевич в рамках сотрудничества с НИИ радиоприема и акустики предложил новую методику расчета приведенных параметров упругости и

спектра частот трехслойных пластин с сотовым наполнителем, применяемых в высококачественных акустических системах.

В 1992 году, рассматривая задачу расчета кварцевых резонаторов, Петр Евгеньевич проанализировал сложную проблему определения высокочастотного спектра пластины переменной толщины. Используя асимптотический подход к трехмерным динамическим уравнениям теории упругости, он нашел высокочастотные формы колебаний пластины, локализованные в окрестности максимума ее толщины [8].

С 1994 года Петр Евгеньевич принимает активное участие в приложении теории оболочек и пластин к проблемам офтальмологии. Предложенные модели помогают при описании патологических изменений в склере или роговице глаза, а также изменений напряженно-деформированного состояния оболочек глаза после хирургических вмешательств. Некоторые результаты, полученные им в этой области, отражены в работе [9].

Особо можно отметить работу [10], в которой предложена первая аналитическая модель тонометра Маклакова, позволяющая оценить влияние различных параметров глаза на показатели внутриглазного давления (ВГД) и связать эти показатели с истинным ВГД. Эта работа очень актуальна, так как в связи с развитием рефракционной хирургии параметры роговицы и склеры стали очень сильно меняться. В 2005 году эта работа была отмечена в журнале «Известия РАН. Механика жидкости и газа» как лучшая работа года.

В 2001 году П. Е. Товстик по инициативе Института истории искусств был привлечен к исследованию проблемы оптимизации формы русского колокола. Для решения этой сложной и многогранной проблемы был предложен эффективный вычислительный алгоритм, позволяющий определить влияние геометрической формы колокола на тембр его звучания [11].

Проведен анализ нелинейных колебаний стержневых конструкций, находящихся под действием случайного волнового давления. При решении задачи учитывались изгибная жесткость балки, присоединенная масса и силы сопротивления воды. Анализ ориентирован на проектирование и расчет морских стационарных платформ [12].

Неклассические задачи теории тонкостенных конструкций и теории упругости. В последние годы внимание Петра Евгеньевича привлекают неклассические задачи статики и динамики тонких оболочек и пластин. К ним относятся задачи устойчивости и колебаний многослойных оболочек, оболочек, армированных нитями, оболочек и пластин, лежащих на упругом основании, балок, пластин и оболочек, изготовленных из материала с общей анизотропией, и др.

Уточненные соотношения упругости, выведенные первоначально для однослойных оболочек [6], получены теперь и для многослойных оболочек. Проведено сравнение двумерной и трехмерной теорий многослойных оболочек, исследована устойчивость многослойной оболочки при осевом сжатии.

П. Е. Товстиком разработана двумерная теория анизотропных оболочек вращения, армированных нелинейно упругими нитями, не воспринимающими сжимающих усилий. В качестве примера решена задача о равновесии цилиндрической оболочки под действием равномерного внутреннего давления. Анизотропия проявляется в окрестности краев оболочки, где имеют место деформации сжатия.

При локальном подходе к задачам устойчивости переменные коэффициенты уравнений замораживаются, граничные условия игнорируются, а решение ищется в виде двояко-периодической функции. При определенных ограничениях этот подход

дает хорошее приближение к точному решению задачи. Локальный подход использован П. Е. Товстиком при исследовании устойчивости оболочек и пластин, лежащих на упругом основании [13]. Для ряда задач получены явные аналитические решения. Основным качественным результатом состоит в том, что для оболочек на упругом основании область применимости локального подхода существенно шире, чем при отсутствии основания.

Большая серия работ Петра Евгеньевича посвящена исследованию балок, пластин и оболочек, изготовленных из линейно упругого однородного анизотропного материала общего вида, соотношения упругости которого содержат 21 упругий модуль.

Выведены одномерные уравнения статики и свободных колебаний балки-полоски, изготовленной из анизотропного материала общего вида. Показано, что использование как гипотез Кирхгофа—Лява, так и классических гипотез Тимошенко—Рейсснера не приводит к корректным одномерным уравнениям. Предложен вариант обобщенной модели Тимошенко—Рейсснера, позволяющий точно удовлетворить граничным условиям на поверхности балки и приводящий к асимптотически корректной одномерной модели [14].

Получены двухмерные уравнения, описывающие прогиб и поперечные колебания тонкой пластины из линейно упругого однородного анизотропного материала общего вида. Оказалось, что в отличие от ортотропных материалов как гипотезы Кирхгофа—Лява, так и гипотезы Тимошенко—Рейсснера приводят к двухмерным моделям, ошибочным в главных членах по отношению к малому параметру тонкостенности, равному отношению толщины пластины к длине волны. Для вывода корректной двухмерной модели используется обобщенная гипотеза Тимошенко—Рейсснера. Показано, что в случае преимущественно изгибной деформации построенная двухмерная модель является асимптотически точной в главных членах по отношению к малому параметру тонкостенности [15].

На базе обобщенных гипотез Тимошенко—Рейсснера исследованы свободные колебания и устойчивость под действием однородного внешнего давления тонких упругих цилиндрических оболочек, изготовленных из материала с общей анизотропией. Асимптотическим методом получены приближенные формулы для определения частот и форм колебаний, критического внешнего давления и форм потери устойчивости. Достоверность асимптотических результатов подтверждается численными расчетами методом конечных элементов [16].

Двухмерные дифференциальные уравнения пластин и оболочек, полученные с использованием обобщенных гипотез Тимошенко—Рейсснера, имеют 10-й порядок. Путем асимптотического разложения решений трехмерных уравнений теории упругости для пластины выведена двухмерная модель 8-го порядка, имеющая ту же асимптотическую точность, что и модель Кирхгофа—Лява для изотропных пластин, и не содержащая интегралов пограничного слоя. Получено дисперсионное уравнение для изгибных низкочастотных колебаний и уравнение изгиба для функционально-градиентной пластины с неоднородными по толщине свойствами, в том числе для многослойной пластины. Во всех случаях найдены два первых члена ряда по малому параметру относительной тонкостенности [17].

Совместно с академиком Н. Ф. Морозовым решены задачи о свободных колебаниях и устойчивости сжатого трансверсально изотропного пространства, полупространства и трансверсально изотропной сжатой пластины.

Особое внимание уделено анализу форм потери устойчивости как самого упругого основания, так и пластины, лежащей на нем. Нелинейный анализ энергии после-

критической деформации приводит к выводу о реализации шахматной формы потери устойчивости, что соответствует экспериментальным результатам [18, 19].

С использованием уравнений геометрически нелинейной теории упругости исследована поверхностная устойчивость трансверсально анизотропного упругого полупространства под действием сжимающих напряжений. Анализ потери устойчивости в закритической стадии показал, что вмятины вблизи свободной поверхности полупространства располагаются в шахматном порядке [20].

При анализе этих задач для сжатого трансверсально изотропного пространства была найдена критическая нагрузка объемной потери устойчивости, связанная с нарушением неравенства Адамара. Для такого материала общая система 6-го порядка расщепляется на системы 4-го и 2-го порядков, в связи с чем возможны две различные формы потери устойчивости. Какая из них реализуется раньше, зависит от уровня анизотропии [21].

Заключение. П. Е. Товстику принадлежат более 250 научных публикаций, в том числе 7 монографий. В наукометрические базы Web of Science и Scopus входят около 100 его работ. Петр Евгеньевич создал научную школу по применению асимптотических методов для изучения колебаний и устойчивости тонких оболочек. Среди его учеников пять докторов наук: Б. Н. Квасников (1989), С. Б. Филиппов (1994), Г. И. Михасев (1998), С. М. Бауэр (2002), В. А. Шеховцов (2006) и 33 кандидата наук. Совместно со своими учениками он написал несколько отличных учебников по применению асимптотических методов в механике твердых тел, в том числе [22–24].

Петр Евгеньевич заботливо относится к научному росту сотрудников кафедры, которую он возглавляет уже 38 лет. При вступлении в должность заведующего кафедрой он был единственным профессором на ней. В настоящее время на кафедре работают еще шесть профессоров. Все они являются ее выпускниками. Широта интересов П. Е. Товстика позволяет ему развивать научные направления, которые были на кафедре при его предшественнике Н. Н. Поляхове. Продолжает успешно работать школа по аналитической механике. В 2000 году в издательстве «Высшая школа» вышло второе издание учебника по теоретической механике для университетов, а в 2009 году издательство «Шпрингер» выпустило монографию С. А. Зегжды, Ш. Х. Солтанханова, М. П. Юшкова «Неголономная механика. Теория и приложения» на английском языке. Редактором этих изданий был Петр Евгеньевич.

Петр Евгеньевич всегда вел большую научно-общественную работу. В настоящее время он является членом Национального комитета России по теоретической и прикладной механике, председателем секции теоретической механики имени Н. Н. Поляхова Санкт-Петербургского Дома ученых РАН, ответственным редактором журнала «Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия», председателем диссертационного ученого совета по защите докторских диссертаций, председателем методической комиссии математико-механического факультета, членом Ученого совета Санкт-Петербургского университета.

Петр Евгеньевич награжден орденом Почета, почетным знаком «За отличные успехи в работе в области высшего образования СССР» и почетной грамотой СПбГУ «За педагогическое мастерство и подготовку научных кадров». Следует отметить, что полученные им награды и премии Петр Евгеньевич не считает личной заслугой, а воспринимает их как положительную оценку деятельности всей кафедры.

Руководя диссертационным советом, принимающим к защите докторские и кандидатские диссертации по трем основным направлениям механики, Петр Евгеньевич тщательно изучает все подаваемые в совет диссертации и дает им точные и объектив-

ные оценки. При обнаружении в работе недостатков он объясняет соискателю, как их следует устранить. Это относится не только к диссертациям, но и к статьям для журнала «Вестник СПбГУ. Серия 1» и сборника «Прикладная механика». Так исключительно ответственно и всегда доброжелательно по отношению к авторам Петр Евгеньевич выполняет свои обязанности ответственного редактора. Редактировать ему приходится не только периодические издания, но и монографии, посвященные различным разделам механики, а также учебники и учебные пособия.

Петр Евгеньевич обладает энциклопедическими знаниями почти во всех разделах современной механики. Его эрудиция расширяется и углубляется благодаря постоянным контактам с коллегами. К нему обращаются за консультациями не только аспиранты, сотрудники кафедры и факультета, но даже совершенно посторонние люди. И все они получают четкие и ясные ответы на свои вопросы. Не удивительно, что Петр Евгеньевич пользуется большим авторитетом у всех, кто его знает.

Петр Евгеньевич встретил свой юбилей в расцвете творческих сил. Желаем дорогому Петру Евгеньевичу счастья в личной жизни, дальнейших научных успехов и здоровья.

*С. М. Бауэр, В. Г. Быков, Г. А. Леонов,
Н. Ф. Морозов, А. Л. Смирнов, С. Б. Филиппов*

Литература

1. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
2. *Михасев Г. И., Товстик П. Е.* Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы. М.: Наука, 2009. 292 с.
3. *Hasegawa E. M., Smirnov A. L., Tovstik P. E.* Buckling of thin anisotropic shells // Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering. 2000. Vol. 24. P. 169–178.
4. *Товстик П. Е.* Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. М.: Наука, 1995. 320 с.
5. *Tovstik P. E., Smirnov A. L.* Asymptotic methods in the buckling theory of elastic shells. World Scientific Publishing Co Ltd., Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 2001. 347 p.
6. *Кабриц С. А., Михайловский Е. И., Товстик П. Е., Черных К. Ф., Шамина В. А.* Общая нелинейная теория упругих оболочек. СПб.: Изд. СПбГУ, 2002. 388 с.
7. *Бауэр С. М., Ковалев А. М., Петров М. Б., Тихомиров В. В., Товстик П. Е., Улитин М. И., Филиппов С. Б.* Расчет и оптимизация металлических зеркал телескопов. СПб.: Изд. СПбГУ, 1997. 228 с.
8. *Товстик П. Е.* Свободные высокочастотные колебания пластин переменной толщины // ПММ, 1992, № 3. С. 473–477.
9. *Бауэр С. М., Зимин Б. А., Товстик П. Е.* Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии. СПб.: Изд. СПбГУ, 2000. 92 с.
10. *Бауэр С. М., Любимов Г. А., Товстик П. Е.* Математическое моделирование метода Маклакова измерения внутриглазного давления // Изв. РАН. МЖГ, 2005, № 1. С. 24–39.
11. *Зегжда С. А., Товстик П. Е., Черняев С. П.* Математическая модель колебаний колокола // Вестник СПбГУ. Сер. 1, 2002, вып. 3. С. 81–88.
12. *Товстик П. Е., Товстик Т. М., Шеловцов В. А.* О влиянии формы спектральной плотности случайного волнения на колебания опорного блока морской стационарной платформы // Вестник СПбГУ. Сер. 1, 2012, вып. 2. С. 61–68.
13. *Товстик П. Е.* Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании // Изв. РАН. МТТ, 2005, № 1. С. 147–160.
14. *Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Одномерные модели балки из анизотропного материала в случае косоугольной анизотропии // Изв. РАН. МТТ, 2011, № 6. С. 93–103.
15. *Товстик П. Е.* Двухмерные модели пластин из анизотропного материала // ДАН РФ, 2009. Т. 425. С. 487–491.

16. *Tovstik P. E., Tovstik T. P.* Two-dimensional linear model of elastic shell accounting for general anisotropy of material // *Acta Mechanica*, 2014. Vol. 225. P. 647–661.
17. *Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Уравнение изгиба пластины второго порядка точности // *ДАН РФ*, 2014. Т. 457. С. 660–663.
18. *Товстик П. Е.* Колебания и устойчивость предварительно напряженной пластины, лежащей на упругом основании // *ПММ*, 2009. Т. 73, № 1. С. 106–120.
19. *Морозов Н. Ф., Товстик П. Е.* О формах потери устойчивости сжатой пластины на упругом основании // *ДАН РФ*, 2012. Т. 446. С. 37–41.
20. *Морозов Н. Ф., Товстик П. Е.* Устойчивость поверхностного слоя при силовом и температурном нагружении // *Изв. РАН. МТТ*, 2010, № 6. С. 5–15.
21. *Морозов Н. Ф., Товстик П. Е.* Устойчивость однородной трансверсальной изотропной линейной упругой среды // *ДАН РФ*, 2011. Т. 438. С. 332–336.
22. *Bauer S. M., Filippov S. B., Smirnov A. L., Tovstik P. E.* Asymptotic methods in mechanics with applications to thin shells and plates // *Asymptotic methods in mechanics, CRM Proc. and Lect. Notes* / eds R. Vaillancourt, A. L. Smirnov. AMS, Providence, Rhode Island USA, 1993. P. 3–140.
23. *Товстик П. Е., Бауэр С. М., Смирнов А. Л., Филиппов С. Б.* Асимптотические методы в механике твердого тела. Регулярная и хаотическая динамика, 2007. 360 с.
24. *Bauer S. M., Filippov S. B., Smirnov A. L., Tovstik P. E., Vaillancourt R.* Asymptotic methods in mechanics of solids // *International Series of Numerical Mathematics*. Vol. 167. Springer International Publishing Switzerland, 2015. 325 p.

Статья поступила в редакцию 22 октября 2015 г.

References

1. Goldenveizer A. L., Lidsky V. B., Tovstik P. E., *Free Vibrations of Thin Elastic Shells* (Nauka, Moscow, 1979, 384 p.) [in Russian].
2. Mikhasev G. I., Tovstik P. E. *Localized vibrations and waves in thin shells. Asymptotic methods* (Nauka, Moscow, 2009, 292 p.) [in Russian].
3. Haseganu E. M., Smirnov A. L., Tovstik P. E. “Buckling of thin anisotropic shells”, *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering* **24**, 169–178 (2000).
4. Tovstik P. E., *Buckling of thin shells. Asymptotic methods* (Nauka, Moscow, 1995, 320 p.) [in Russian].
5. Tovstik P. E., Smirnov A. L. “Asymptotic methods in the buckling theory of elastic shells” (World Scientific Publishing Co Ltd., Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 2001, 347 p.).
6. Kabrits S. A., Mikhailockiy E. I., Tovstik P. E., Chernykh K. F., Shamina V. A., *Nonlinear theory of elastic shells* (St. Petersburg Univ. Press, 2001, 388 p.) [in Russian].
7. Bauer S. M., Filippov S. B., Kovalev A. M., Petrov M. B., Tikhomirov V. V., Tovstik P. E., Ulitin M. I., *Research and optimization of metal mirrors of telescopes* (St. Petersburg Univ. Press, 1997, 228 p.) [in Russian].
8. Tovstik P. E., “Free high-frequency vibrations of anisotropic plates of variable thickness”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **56**, issue 3, 390–395 (1992).
9. Bauer S. M., Zimin B. A., Tovstik P. E., *The elementary models of the shells and plates theory in ophthalmology* (St. Petersburg Univ. Press, 2002, 92 p.) [in Russian].
10. Bauer S. M., Lyubimov G. A., Tovstik P. E., “Mathematical modeling of Maklakoff’s method for measuring the intraocular pressure”, *Fluid Dynamics* **40**, issue 1, 20–33 (2005).
11. Zegzhda S. A., Tovstik P. E., Chernyaev S. P., “A mathematical model of bell vibrations”, *Vestnik St. Petersburg University. Ser. 1: Mathematics. Mechanics. Astronomy* Issue 3, 81–88 (2002) [in Russian].
12. Tovstik P. E., Tovstik T. M., Shekhovtsov V. A., “The impact of the shape of the spectral density of random wave disturbance on the vibrations of a fixed sea-based offshore platform”, *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **45**, issue 2, 98–105 (2012).
13. Tovstik P. E., “The local stability of plates and shallow shells on an elastic foundation”, *Izv. RAN, MTT* (1), 147–160 (2005) [in Russian].
14. Tovstik P. E., Tovstik T. P., “One-dimensional models of a beam made of an anisotropic material with oblique anisotropy”, *Mechanics of Solids* **46**, issue 6, 888–897 (2011).
15. Tovstik P. E., “Models of plates made of an anisotropic material”, *Doklady Physics* **54**, issue 4, 205–209.
16. Tovstik P. E., Tovstik T. P., “Two-dimensional linear model of elastic shell accounting for general anisotropy of material”, *Acta Mechanica* **225**, 647–661 (2014).

17. Tovstik P. E., Tovstik T. P., “A thin-plate bending equation of second-order accuracy”, *Doklady Physics* **59**, issue 8, 389–392 (2014).
18. Tovstik P. E., “The vibrations and stability of a prestressed plate on an elastic foundation”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **73**, issue 1, 77–87 (2009).
19. Morozov N. F., Tovstik P. E., “Buckling forms of a compressed plate on an elastic foundation”, *Doklady Physics* **57**, issue 9, 335–339 (2012).
20. Morozov N. F., Tovstik P. E., “Surface layer stability under force and temperature loading”, *Mechanics of Solids* **45**, issue 6, 769–777 (2010).
21. Morozov N. F., Tovstik P. E., “On the modes of surface stability”, *Doklady Physics* **56**, issue 5, 300–304 (2011).
22. Bauer S. M., Filippov S. B., Smirnov A. L., Tovstik P. E., “Asymptotic methods in mechanics with applications to thin shells and plates”, *Asymptotic methods in mechanics, CRM Proc. and Lect. Notes* (R. Vaillacourt, A. L. Smirnov, eds. AMS, Providence, Rhode Island USA, 1993, 3–140).
23. Bauer S. M., Filippov S. B., Smirnov A. L., Tovstik P. E., *Asymptotic methods in mechanics of solids* (Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika, 2007, 360 p.) [in Russian].
24. Bauer S. M., Filippov S. B., Smirnov A. L., Tovstik P. E., Vaillacourt R., *Asymptotic methods in mechanics of solids, International Series of Numerical Mathematics* **167** (Springer International Publishing Switzerland, 2015, 325 p.).