

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РЕЗОНАНСЫ В ЗАДАЧЕ О ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ ПО ТОНКОМУ СТЕРЖНЮ*

А. К. Беляев¹, Н. Ф. Морозов², П. Е. Товстик², Т. П. Товстик¹

¹ Институт проблем машиноведения РАН,

Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

² Санкт-Петербургский государственный университет,

Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Рассматривается продольный удар по тонкому упругому стержню, порождающий в нем периодическую систему продольных волн. При определенных значениях параметров задачи в линейном приближении эти волны порождают параметрические резонансы, сопровождающиеся неограниченным ростом амплитуды поперечных колебаний. Для получения конечных значений амплитуд рассматривается квазилинейная система, учитывающая влияние поперечных колебаний на продольные. Ранее эта система была численно решена методом Бубнова—Галлеркина и получены биения, сопровождающиеся обменом энергией продольных и поперечных колебаний. Здесь построено приближенное аналитическое решение этой системы, основанное на двухмасштабных разложениях. Проведен качественный анализ решения. Найдена оценка максимального поперечного прогиба в зависимости от способа нагружения. Рассмотрены как кратковременный, так и длительный импульсы. Показано, что в случае внезапно приложенного длительного импульса, меньшего эйлеровой критической нагрузки, возможно развитие интенсивных поперечных колебаний. Библиогр. 17 назв. Ил. 7. Табл. 1.

Ключевые слова: стержень, продольный удар, поперечный изгиб, параметрические резонансы.

1. Введение. При статическом сжатии стержень может потерять устойчивость прямолинейной формы, переходя в смежные формы равновесия (это классическая задача Эйлера, которой он начал заниматься еще в 1744 году [1, 2]). При динамическом продольном нагружении задача значительно усложняется. При строгой постановке по стержню распространяются продольные упругие волны, которые, в свою очередь, могут порождать интенсивные поперечные колебания. Однако в связи с тем, что время распространения продольной волны по длине стержня существенно меньше наименьшего периода поперечных колебаний, как правило, используется приближенная модель, согласно которой считается, что продольная волна распространяется по стержню мгновенно, а осевая сжимающая сила постоянна по длине. При такой постановке решены задачи с внезапным приложением конечной нагрузки, превосходящей критическое значение в статике [3], с нагрузкой, линейно возрастающей со временем [4], с нагрузкой, периодически меняющейся со временем и приводящей к параметрическому резонансу [5].

В работах [6–13] выполнены исследования, в которых задача решается в более строгой постановке с учетом конечной скорости распространения продольных волн в стержне. Рассматривается как кратковременный продольный удар в предположении, что время удара меньше времени пробега продольной волны по удвоенной длине стержня [6, 8, 9–11, 13], так и продолжительный удар [7, 12]. В линейной постановке найдены условия возникновения параметрического резонанса, построена область неустойчивости на плоскости «длина стержня — нагрузка» и вычислены характери-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 12.01.92000 и ННС-а, 13.01.00523-а) и СПбГУ (грант 6.38.337.2015).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2016

стические показатели. С использованием метода Бубнова–Галеркина построено [10] приближенное решение нелинейной задачи. Установлено, что при квазилинейной постановке амплитуда поперечных колебаний существенно меньше, чем при линейной. Обнаружены биения, связанные с переходом энергии поперечных колебаний в продольные и наоборот. Как в линейной, так и в нелинейной постановках исследовано влияние вязкоупругих сил сопротивления на вызванные ударом колебания.

При длительном силовом воздействии с нагрузкой, превосходящей эйлерову, и линейный, и квазилинейный подходы не приводят к конечным значениям амплитуды поперечных перемещений. Поэтому используется нелинейный подход. Исследуется развитие закритических деформаций стержня [12] и отмечается связь картины деформирования с эффектом, обнаруженным в работе [3], а также с эластичностью Эйлера.

Если длительно действующая нагрузка превосходит критическую эйлерову нагрузку, то при линейном подходе (как без учета, так и с учетом распространения продольных волн) имеет место неограниченный рост амплитуды поперечных колебаний. Поэтому линейный подход описывает движение лишь на начальном интервале времени, когда амплитуда поперечных перемещений невелика. С течением времени продольные волны затухают, и стержень принимает форму одной из эластик Эйлера.

Если длительно действующая нагрузка меньше эйлеровой, при определенных значениях параметров в линейном приближении возможен параметрический резонанс [12], также приводящий к неограниченному росту амплитуды, а при учете вязкоупругих сил — к существенному росту амплитуды. Та же качественная картина имеет место при параметрическом резонансе и в случае кратковременного продольного импульса. Причина роста амплитуды заключается в том, что при линейном подходе продольные колебания возбуждают поперечные, однако обратное влияние поперечных колебаний на продольные не учитывается. Для получения конечных значений амплитуды поперечных колебаний в этих задачах следует обращаться к квазилинейной системе, учитывающей влияние поперечных колебаний на продольные [13].

В работе [13] исследуются главные параметрические резонансы для квазилинейной системы, описывающей связанные продольно-поперечные колебания. Построено приближенное аналитическое решение, основанное на двухмасштабных разложениях [14] и позволяющее провести качественное исследование. Использование двухмасштабных разложений естественно для описания биений, при которых амплитуды продольных и поперечных колебаний медленно меняются со временем и происходит обмен энергией продольных и поперечных колебаний. В частности, получены оценки для максимальных значений амплитуд поперечных колебаний в задачах, в которых линейное приближение приводит к параметрическим резонансам.

В настоящей работе продолжены исследования, начатые в работе [13]. Тем же методом двухмасштабных разложений исследованы комбинационные параметрические резонансы, построена полная картина резонансных областей на плоскости «длина стержня — нагрузка». Найдены области, в которых имеет место развитие интенсивных поперечных колебаний при нагрузке, меньшей эйлеровой. Получена оценка максимальных поперечных прогибов стержня как при кратковременном, так и при длительном нагружении.

2. Квазилинейная система уравнений движения стержня. Рассмотрим движение тонкого упругого стержня под действием продольной ударной силы, приложенной к его левому концу. В продольном направлении правый конец стержня закреплен, а в поперечном направлении оба конца шарнирно оперты (рис. 1). Принята

модель балки Бернулли–Эйлера. В квазилинейной постановке уравнения движения и граничные условия в безразмерной форме имеют вид [13]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(1 + \frac{\delta_u}{\omega_u} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) &= 0, & \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= -\varepsilon_0(t), & u(1, t) &= 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \mu^2 \left(1 + \frac{\delta_w}{\omega_w} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= 0, & w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0, & x = 0, 1, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $u(x, t), w(x, t)$ — проекции перемещения, в качестве единиц длины и времени приняты длина стержня и время пробега по нему продольной волны, μ — малый параметр толщины, L — длина стержня, r — радиус инерции поперечного сечения, S и J — его площадь и момент инерции. Также используется большой параметр длины l ,

$$l = \frac{1}{\mu}, \quad \mu = \frac{r}{L}, \quad J = Sr^2, \quad \varepsilon_0(t) = \varepsilon_0 f(t).$$

Через $\varepsilon(x, t) = -\partial u/\partial x - 1/2(\partial w/\partial x)^2$ обозначена продольная деформация сжатия, связанная с продольной сжимающей силой по формуле $P = ES\varepsilon$, где E — модуль Юнга. В линейном приближении $\varepsilon(x, t) = -\partial u/\partial x$. Дополнительно в систему (2.1) введены силы вязкого трения по модели Фойгхта–Сорокина [15], δ_u, δ_w — малые безразмерные коэффициенты сопротивления продольных и поперечных колебаний, ω_u, ω_w — характерные частоты колебаний. Для продольных перемещений начальные условия считаем нулевыми, а для поперечных — исчезающе малыми, но не нулевыми, ибо в противном случае возбуждение поперечных колебаний невозможно.

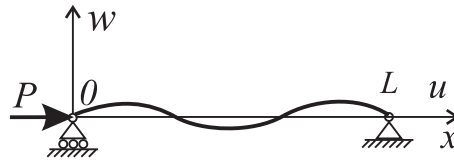


Рис. 1. Сжатый стержень

Система (2.1) является исходной для приведенного ниже анализа. В ней $\varepsilon_0(t) = P(t)/(ES)$ — заданная деформация на левом конце стержня. Рассматриваются кратковременное ударное воздействие длительностью τ , при котором $f(t) \equiv 0$ при $t > \tau$, и длительное воздействие при условии $f(t) = 1$, $\varepsilon_0 < \varepsilon_{cr}$, где $\varepsilon_{cr} = \mu^2 \pi^2$ — деформация, соответствующая эйлеровой критической силе продольного сжатия. Длительное воздействие при $\varepsilon_0 > \varepsilon_{cr}$ здесь не рассматривается, ибо прогибы в этом случае могут быть большими и точность системы (2.1) для полного анализа недостаточна. Этот случай подробно рассмотрен в [3, 11].

3. Линейное приближение. На начальном этапе движения поперечные прогибы малы, и для описания движения может быть использовано линейное приближение [6–9]. В первом уравнении (2.1) полагаем $w = 0$, а во втором — $\varepsilon = -\partial u/\partial x$. Приведем некоторые результаты, полезные для дальнейшего изложения.

В линейном приближении задача (2.1) сводится к последовательному решению двух линейных краевых задач. Распространение продольных волн в стержне описывается первым уравнением (2.1) при $w = 0$. Представим решение в виде ряда по собственным функциям задачи:

$$v''(x) + \nu^2 v(x) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(1) = 0, \quad (' = d()/dx. \quad (3.1)$$

Находим

$$u(x, t) = \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) v_k(x), \quad v_k(x) = \cos \nu_k x, \quad \nu_k = (k - 0.5)\pi, \quad (3.2)$$

$$\ddot{\varphi}_k + \delta_u \nu_k \dot{\varphi}_k + \nu_k^2 \varphi_k = 2f(t), \quad \varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0,$$

где точкой обозначена производная по времени. Осевую деформацию $\varepsilon(x, t)$ представим в виде

$$\varepsilon(x, t) = -\frac{\partial u}{\partial x} = 2\varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \varphi_k(t) \sin \nu_k x = 2\varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(t)}{\nu_k} \sin \nu_k x. \quad (3.3)$$

Приведем функции $\psi_k(t)$ для кратковременного П-образного импульса длительностью τ ($f(t) = H(\tau - t)$, $H(z)$ – функция Хевисайда):

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1 - \cos(\nu_k t) e^{-\delta_u \nu_k t/2}, & t \leq \tau, \\ (\cos \nu_k(t - \tau) - \cos \nu_k t) e^{-\delta_u \nu_k t/2}, & t > \tau \end{cases} \quad (3.4)$$

и для длительного импульса ($f(t) \equiv 1$)

$$\psi_k(t) = 1 - \cos(\nu_k t) e^{-\delta_u \nu_k t/2}. \quad (3.5)$$

В формулах (3.4) и (3.5) приближенно (при $\delta_u \ll 1$) учитывается влияние вязкости. При ее отсутствии следует считать $\delta_u = 0$.

При $\delta_u = 0$ функция $\varepsilon(x, t)$ периодична ($\varepsilon(x, t + 4) = \varepsilon(x, t)$) для кратковременного импульса после прекращения его действия (при $t > \tau$), а для длительного импульса – при всех $t > 0$. Периодичность функции $\varepsilon(x, t)$ приводит к появлению параметрических резонансов.

Перейдем к рассмотрению поперечных колебаний. Решение второго уравнения (2.1) ищем в виде ряда Фурье

$$w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) \sin m\pi x. \quad (3.6)$$

Функции $T_m(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d^2 T_m}{dt^2} + \delta_w \omega_m \frac{dT_m}{dt} + \omega_m^2 T_m(t) - \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(t) T_n(t) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (3.7)$$

где $\omega_m = \mu m^2 \pi^2$ и коэффициенты $a_{mn}(t)$ равны

$$a_{mn}(t) = 2mn\pi^2 \int_0^1 \varepsilon(x, t) \cos m\pi x \cos n\pi x dx = \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} c_{mnk} \varphi_k(t), \quad (3.8)$$

$$c_{mnk} = 4mn\nu_k^2 \left(\frac{1}{(2k-1)^2 - 4(m-n)^2} + \frac{1}{(2k-1)^2 - 4(m+n)^2} \right).$$

Пусть $\delta_u = 0$. Для кратковременного импульса после прекращения его действия функции $a_{mn}(t)$ периодичны с периодом $T = 2\pi/\nu_1 = 4$ и имеют нулевое среднее

значение. Для длительного импульса среднее значение деформации $\varepsilon(x, t)$ равно ε_0 . Выделяя его, запишем уравнение (3.7) в виде

$$\frac{d^2 T_m}{dt^2} + \delta_w \omega_m \frac{dT_m}{dt} + (\omega_m^2 - m^2 \pi^2 \varepsilon_0) T_m(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_{mn}(t) T_n(t) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (3.7')$$

где функции $\hat{a}_{mn}(t) = a_{mn}(t) - \varepsilon_0 \delta_{mn} m^2 \pi^2$ имеют нулевое среднее значение (δ_{mn} — символ Кронекера).

При $a_{mn}(t) = 0$ возможна статическая потеря устойчивости по m -й форме при $\omega_m^2 - m^2 \pi^2 \varepsilon_0 < 0$ или $\varepsilon_0 > m^2 \varepsilon_{cr}$. Наличие периодических функций $a_{mn}(t)$ приводит к тому, что потеря устойчивости по m -й форме может произойти и при меньших значениях ε_0 , в частности при $\varepsilon_0 < \varepsilon_{cr}$, т.е. при нагрузке, меньшей эйлеровой [12].

4. Параметрические резонансы. Рассмотрим устойчивость нулевого решения системы (3.7). Эта система содержит два безразмерных параметра: малую амплитуду продольной деформации ε_0 и малый параметр μ — относительную толщину стержня, или обратную ей большую относительную длину $l = \mu^{-1}$.

При $\varepsilon_0 = 0$, $\delta_u = \delta_w = 0$ частоты собственных колебаний системы (3.7) равны $\omega_m = \mu m^2 \pi^2$, а частота параметрического возбуждения равна $\nu_1 = \pi/2$. Методы исследования параметрических колебаний хорошо известны [5, 16, 17]. При малых ε_0 области неустойчивости возможны лишь в окрестностях значений

$$|\omega_m \pm \omega_n| = k \nu_1, \quad m, n, k = 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

На плоскости параметров (l, ε_0) при отсутствии вязкости ($\delta_w = 0$) области параметрической неустойчивости примыкают к оси $\varepsilon_0 = 0$ при

$$l_{mnk} = \frac{2\pi(m^2 \pm n^2)}{k}, \quad m, n, k = 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

Множество критических длин, определяемое формулой (4.2), является всюду плотным, а сами резонансы возбуждаются с различными скоростями роста амплитуд колебаний. При $m = n$, $k = 1$ получаем главные резонансы, при $m \neq n$ — комбинационные резонансы и при $k > 1$ — резонансы на обертоном. Главные резонансы $l_m = 4\pi m^2$ рассмотрены в [13], поэтому обратимся к комбинационным резонансам

$$l_{mn} = 2\pi(m^2 \pm n^2). \quad (4.3)$$

Как показано ниже, резонансы при $l_{mn} = 2\pi(m^2 - n^2)$ в первом приближении не возбуждаются. Критические длины для резонансов на обертоном получаются по формуле $l_{mnk} = l_{mn}/k$.

Случай $m = 1$, а также некоторые случаи резонансов на обертоном при больших k следует исключить из рассмотрения, ибо стержень оказывается слишком коротким, чтобы можно было использовать модель балки Бернулли—Эйлера.

Замечание. Вообще говоря, формулу (4.1) следовало бы записать в виде

$$|\omega_m \pm \omega_n| = p \nu_q, \quad m, n, p, q = 1, 2, \dots, \quad (4.4)$$

где ν_q — собственные частоты продольных колебаний в (3.3). С учетом соотношения $\nu_k = (2k - 1)\nu_1$ формула (4.4) эквивалентна (4.1). Детализация (4.4) важна для того,

чтобы различать широкие и узкие области неустойчивости [17]. Касательные к границам $\varepsilon_0^-(l)$ и $\varepsilon_0^+(l)$ широкой области неустойчивости, проведенные из точки $l = l_{mn}$, $\varepsilon_0 = 0$, образуют угол $\alpha > 0$ (рис. 2, а), а касательные к границам узкой области неустойчивости совпадают (рис. 2, б). Ниже рассматриваются лишь широкие области неустойчивости, которые получаются при $p = 1$ в формуле (4.4) или $k = 1, 3, 5, \dots$ в формуле (4.2). Для их исследования можно ограничиться главным по ε_0 приближением. Для построения решения в узких областях неустойчивости требуется рассмотрение старших приближений.

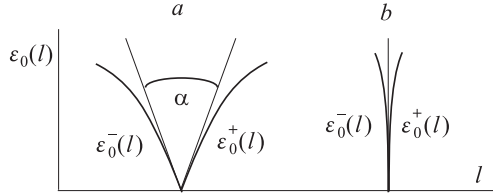


Рис. 2. Широкая (а) и узкая (б) области неустойчивости

5. Интегрирование квазилинейных уравнений движения стержня. Рассмотрим сначала случай кратковременного импульса. Как и в линейном приближении, решение нелинейной системы (2.1) ищем в виде

$$u(x, t) = \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) \cos(\nu_k x), \quad w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) \sin(m\pi x). \quad (5.1)$$

Умножая уравнения (2.1) на функции $\cos(\nu_k x)$ и $\sin(m\pi x)$ соответственно и интегрируя по x в пределах $(0, 1)$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_k}{dt^2} + \left(1 + \frac{\delta_u}{\nu_k} \frac{d}{dt}\right) \left(\nu_k^2 \varphi_k + \sum_{m,n=1}^{\infty} D_{mnk} T_m T_n\right) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \frac{d^2 T_m}{dt^2} + \left(1 + \frac{\delta_w}{\omega_m} \frac{d}{dt}\right) \omega_m^2 T_m - L_{mn}(T) - \varepsilon_0 \sum_{k,n=1}^{\infty} c_{mnk} T_n \varphi_k &= 0, \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где

$$\begin{aligned} D_{mnk} &= mn\pi^2 \left(\frac{2(m+n)^2}{4(m+n)^2 - (2k-1)^2} + \frac{2(m-n)^2}{4(m-n)^2 - (2k-1)^2} \right), \\ L_{mn}(T) &= \frac{3(m\pi)^4}{8} T_m^3 - \frac{3(m\pi)^2 T_m}{4} \sum_{n \neq m} (n\pi)^2 T_n^2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Заметим, что функции $L_{mn}(T)$ имеют более высокий порядок малости по ε_0 и не входят в нулевое приближение, построением которого мы ограничиваемся.

В работе [13] найдено приближенное решение системы (5.2) при главных резонансах $2\omega_m \approx \nu_1$ в виде гармонических функций с медленно меняющимися амплитудами. При этом взаимодействие форм поперечных колебаний не учитывается, и в суммах, входящих во второе уравнение (5.2), сохранено лишь одно слагаемое с $n = m$.

Ниже рассматриваются комбинационные резонансы $\omega_m \pm \omega_n \approx \nu_1$, $\omega_m > \omega_n$. Вместо (5.2) запишем все уравнения для функций $\varphi_k(t)$, ибо они в первую очередь

возбуждаются при ударе, и два уравнения для функций $T_m(t)$ и $T_n(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi_k}{dt^2} + \left(1 + \frac{\delta_u}{\nu_k} \frac{d}{dt}\right) (\nu_k^2\varphi_k + D_{mmk}T_m^2 + 2D_{mnk}T_mT_n + D_{nnk}T_n^2) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \frac{d^2T_m}{dt^2} + \left(1 + \frac{\delta_w}{\omega_m} \frac{d}{dt}\right) \omega_m^2 T_m - L_{mn}(T) - \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} (c_{mmk}T_m + c_{mnk}T_n)\varphi_k &= 0, \\ \frac{d^2T_n}{dt^2} + \left(1 + \frac{\delta_w}{\omega_n} \frac{d}{dt}\right) \omega_n^2 T_n - L_{nm}(T) - \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} (c_{mnk}T_m + c_{nnk}T_n)\varphi_k &= 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Рассмотрим комбинационный резонанс $\omega_m + \omega_n \approx \nu_1$. Если длина l точно соответствует резонансу, то

$$l = l_{mn} = \frac{\pi^2(m^2 + n^2)}{\nu_1}, \quad \omega_m = \widehat{\omega}_m = \frac{m^2\nu_1}{m^2 + n^2}, \quad \omega_n = \widehat{\omega}_n = \frac{n^2\nu_1}{m^2 + n^2}, \quad (5.5)$$

где l_{mn} — критическая длина при параметрическом резонансе. Введем малую расстройку длины $\varepsilon_0\delta$ по формуле $l = l_{mn} + \varepsilon_0\delta$. Положим

$$\omega_m = \widehat{\omega}_m + \varepsilon_0\tilde{\omega}_m, \quad \widehat{\omega}_m = m^2\pi^2/l_{mn}, \quad \tilde{\omega}_m = -\delta\widehat{\omega}_m/l_{mn} + O(\varepsilon_0), \quad (m \rightarrow n), \quad (5.6)$$

где запись $(m \rightarrow n)$ означает, что имеют место соотношения, получающиеся при замене m на n и наоборот.

При $\varepsilon_0 \ll 1$, $\delta_u, \delta_w \ll 1$ неизвестные функции φ_k и T_m малы и описывают колебания с медленно меняющимися амплитудами. Поэтому, как и в [13], используем двухмасштабные разложения [14], представив неизвестные функции в виде

$$\varphi_k = \varepsilon_0\varphi_k^{(0)}(t, \theta) + \varepsilon_0^2\varphi_k^{(1)}(t, \theta) + \dots, \quad T_m = \varepsilon_0T_m^{(0)}(t, \theta) + \varepsilon_0^2T_m^{(1)}(t, \theta) + \dots, \quad (m \rightarrow n), \quad (5.7)$$

где медленное время $\theta = \varepsilon_0t$. Тогда в системе (5.4)

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (5.8)$$

Кроме того, положим $\delta_u = \varepsilon_0\widehat{\delta}_u$, $\delta_w = \varepsilon_0\widehat{\delta}_w$.

Систему (5.4) решаем, приравнявая коэффициенты при ε_0^n . Из равенства коэффициентов при ε_0 в первой степени получаем

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(0)}(t, \theta) &= a_{kc}(\theta) \cos(\nu_k t) + a_{ks}(\theta) \sin(\nu_k t), \quad k = 1, 2, \dots, \\ T_m^{(0)}(t, \theta) &= T_{mc}(\theta) \cos(\widehat{\omega}_m t) + T_{ms}(\theta) \sin(\widehat{\omega}_m t), \quad (m \rightarrow n). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Приравнявая коэффициенты при ε_0^2 , имеем вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi_k^{(1)}}{\partial t^2} + \nu_k^2\varphi_k^{(1)} &= A_k \left(\varphi_k^{(0)}, T_m^{(0)}, T_n^{(0)} \right), \quad k = 1, 2, \dots, \\ \frac{\partial^2T_m^{(1)}}{\partial t^2} + \widehat{\omega}_m^2 T_m^{(1)} &= B_m \left(\varphi_k^{(0)}, T_m^{(0)}, T_n^{(0)} \right), \quad (m \rightarrow n). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Рассматриваемая система диссипативна (или консервативна при $\delta_u = \delta_w = 0$) и не может иметь неограниченно растущие решения, поэтому правые части уравнений (5.10) должны удовлетворять условиям

$$\int_0^{2\pi/\nu_k} A_k \begin{pmatrix} \cos(\nu_k t) \\ \sin(\nu_k t) \end{pmatrix} dt = 0, \quad \int_0^{2\pi/\widehat{\omega}_m} B_m \begin{pmatrix} \cos(\widehat{\omega}_m t) \\ \sin(\widehat{\omega}_m t) \end{pmatrix} dt = 0. \quad (5.11)$$

Условия (5.11) дают

$$\begin{aligned} 2\nu_1 \frac{da_{1c}}{d\theta} + \nu_1^2 \widehat{\delta}_u a_{1c} - D_{mn1}(T_{mc}T_{ns} + T_{ms}T_{nc}) &= 0, \\ 2\nu_1 \frac{da_{1s}}{d\theta} + \nu_1^2 \widehat{\delta}_u a_{1s} + D_{mn1}(T_{mc}T_{nc} - T_{ms}T_{ns}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$2 \frac{da_{kc}}{d\theta} + \nu_k \widehat{\delta}_u a_{kc} = 0, \quad 2 \frac{da_{ks}}{d\theta} + \nu_k \widehat{\delta}_u a_{ks} = 0, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} 2\widehat{\omega}_m \frac{dT_{mc}}{d\theta} + \widehat{\delta}_w \widehat{\omega}_m^2 T_{mc} + \frac{2\delta \widehat{\omega}_m^2}{l_{mn}} T_{ms} - \frac{c_{mn1}}{2} (T_{ns}a_{1c} - T_{nc}a_{1s}) &= 0, \\ 2\widehat{\omega}_m \frac{dT_{ms}}{d\theta} + \widehat{\delta}_w \widehat{\omega}_m^2 T_{ms} - \frac{2\delta \widehat{\omega}_m^2}{l_{mn}} T_{mc} - \frac{c_{mn1}}{2} (T_{nc}a_{1c} + T_{ns}a_{1s}) &= 0, \end{aligned} \quad (m \rightarrow n). \quad (5.14)$$

Для главных параметрических резонансов ($2\widehat{\omega}_m = \nu_1$, $l = l_m + \varepsilon_0\delta$) в уравнениях (5.12), (5.14) следует положить $n = m$ (см. [13]).

Из системы (5.12), (5.14) следует, что в нулевом приближении функции $a_{kc}(\theta)$, $a_{ks}(\theta)$, $k \geq 2$, не входят в уравнения (5.14). При отсутствии сопротивлений ($\widehat{\delta}_u = 0$) эти функции постоянны, а при $\widehat{\delta}_u > 0$ они равны

$$a_{kc}(\theta) = a_{kc}(0)e^{\nu_k \widehat{\delta}_u \theta/2}, \quad a_{ks}(\theta) = a_{ks}(0)e^{\nu_k \widehat{\delta}_u \theta/2}. \quad (5.15)$$

Таким образом, задача свелась к системе уравнений (5.12), (5.14) относительно шести неизвестных функций a_{1c} , a_{1s} , T_{mc} , T_{ms} , T_{nc} , T_{ns} . При интегрировании этой системы нужно задать начальные условия. В качестве начального возьмем момент времени, в который действие ударного импульса прекратилось. Будем считать, что в этот момент $\theta = 0$, а начальные значения $T_{mc}(0)$, $T_{ms}(0)$, $T_{nc}(0)$, $T_{ns}(0)$ пренебрежимо малы. Начальные значения $a_{1c}(0)$ и $a_{1s}(0)$ могут быть найдены из линейного уравнения (3.2), в котором из-за малости промежутка времени $[0, \tau]$ можно пренебречь сопротивлением. Не нарушая общности, можно считать, что $a_{1s}(0) = 0$. Тогда

$$a_{1c}(0) = a(\tau) \equiv (\varphi_1(\tau)^2 + (\dot{\varphi}_1(\tau)/\nu_1)^2)^{1/2}, \quad (5.16)$$

где $\varphi_1(t)$ — решение уравнения (3.2), τ — длительность импульса.

Следовательно, движение при параметрических резонансах после удара зависит от уровня накопленной при ударе энергии продольных колебаний, которая представлена величиной $a(\tau)$. Зависимость величины $a(\tau)$ от формы импульса $f(t)$ обсуждается ниже.

6. Ширина областей неустойчивости при параметрических резонансах. Рассмотрим сначала систему (5.12), (5.14) в линейном приближении ($D_{mn1} = 0$) при

отсутствии сопротивления ($\widehat{\delta}_u = \widehat{\delta}_w = 0$). При этом уравнения (5.12) дают $a_{1c}(\theta) = a$, $a_{1s}(\theta) = 0$, а уравнения (5.14) имеют решения

$$b_{mc}(\theta) = b_{mc}^0 e^{\lambda\theta}, \quad b_{ms}(\theta) = b_{ms}^0 e^{\lambda\theta}, \quad (m \rightarrow n), \quad (6.1)$$

где величина λ удовлетворяет характеристическому уравнению $a_0\lambda^4 + a_1\lambda^2 + a_2 = 0$, причем

$$a_0 = 16\widehat{\omega}_m^2\widehat{\omega}_n^2, \quad a_1 = 16\widehat{\delta}^2\widehat{\omega}_m^2\widehat{\omega}_n^2(\widehat{\omega}_m^2 + \widehat{\omega}_n^2) - 8c^2\widehat{\omega}_m\widehat{\omega}_n, \quad a_2 = \left(c^2 - 4\widehat{\delta}^2\widehat{\omega}_m^2\widehat{\omega}_n^2\right)^2, \quad (6.2)$$

$$c = a c_{mn1}/2, \quad \widehat{\delta} = \delta/l_{mn}.$$

Неустойчивость имеет место при $D = a_1^2 - 4a_0a_2 < 0$ или при расстройке

$$|\delta| < \frac{|c|l_{mn}}{(\widehat{\omega}_m + \widehat{\omega}_n)\sqrt{\widehat{\omega}_m\widehat{\omega}_n}} = \frac{4a|c_{mn1}|(m^2 + n^2)^2}{\pi mn} = K_{mn}a. \quad (6.3)$$

При главном резонансе ширина области неустойчивости определяется по формуле

$$|\delta| < \frac{16a|c_{mm1}|m^2}{\pi} = K_{mm}a, \quad (6.4)$$

которая получается из (6.3) при $n = m$.

Ниже приводятся значения параметра K_{mn} , определяющего ширину области неустойчивости. Для данного m последовательно приведены значения K_{mm} , $K_{m,m-1}$, $K_{m,m-2}$, ..., $K_{m,1}$:

| | | | | | | |
|---------|----------|----------|--------|-------|-------|-------|
| $m = 1$ | 46.9 | | | | | |
| $m = 2$ | 791.5 | 113.7 | | | | |
| $m = 3$ | 4043.0 | 739.4 | 103.7 | | | |
| $m = 4$ | 12 817.5 | 2658.3 | 370.3 | 140.4 | | |
| $m = 5$ | 31 337.2 | 7106.8 | 1025.4 | 356.1 | 194.2 | |
| $m = 6$ | 65 030.8 | 15 683.3 | 2350.5 | 805.8 | 378.0 | 262.0 |

Видим, что ширина области неустойчивости растет вместе с m и при данном m максимальна для главного резонанса, а затем быстро убывает вместе с n .

Рассмотрение тем же способом комбинационных резонансов $\omega_m - \omega_n \approx \nu_1$ показало, что соответствующее характеристическое уравнение не имеет корней с положительной вещественной частью и резонанс не возбуждается.

Как следует из формул (6.3) и (6.4), области параметрических резонансов $\omega_m + \omega_n = \nu_1$ являются широкими. Также широкими будут и области резонансов на обертоном $\omega_m + \omega_n = \nu_k$, $k > 1$. Для этих резонансов критические длины короче в $(2k - 1)$ раз, а поперечные колебания, как правило, возбуждаются существенно меньше, ибо

$$(a_{kc}^2 + a_{ks}^2)^{1/2} \ll (a_{1c}^2 + a_{1s}^2)^{1/2}, \quad k > 1. \quad (6.6)$$

Вернемся к резонансам $\omega_m + \omega_n = \nu_1$ и учтем затухание поперечных колебаний ($\widehat{\delta}_w > 0$) в предположении, что продольные колебания не затухают ($\widehat{\delta}_u = 0$). В этом случае области неустойчивости на плоскости (l, ε_0) отделены от оси $\varepsilon_0 = 0$. Из характеристического уравнения системы (5.14) следует, что при

$$c < \widehat{\delta}_w\widehat{\omega}_m\widehat{\omega}_n \quad \text{или} \quad \varepsilon_0 a < \delta_w |R|, \quad R = \frac{mn}{m^2 + n^2} \left(\frac{1}{4(m+n)^2 - 1} + \frac{1}{4(m-n)^2 - 1} \right), \quad (6.7)$$

ее нулевое решение устойчиво. При отсутствии расстройки длины ($\delta = 0$) оценка (6.7) является точной.

Если $\widehat{\delta}_u > 0$, коэффициенты системы (5.14) становятся неперiodическими, и параметрический резонанс невозможен, однако имеет место увеличение амплитуды [8]. Для приближенной оценки при малых коэффициентах сопротивления может быть использована формула (6.7), в которой величина a медленно затухает по закону $a(\theta) = a_0 e^{-\widehat{\delta}_u \theta / 2}$. Пока $\varepsilon_0 a(\theta) > \delta_w |R|$, амплитуда поперечных колебаний растет и может достигать неоправданно большой величины (см. [8, 12]). Следовательно, для получения корректных значений амплитуды как при отсутствии, так и при наличии сопротивления следует обращаться к нелинейной системе (5.12), (5.14), учитывающей влияние поперечных колебаний на продольные.

7. Анализ системы (5.12), (5.14). Введем обозначения для амплитуд продольных и поперечных колебаний:

$$a_k(\theta) = (a_{kc}^2(\theta) + a_{ks}^2(\theta))^{1/2}, \quad T_m(\theta) = (T_{mc}^2(\theta) + T_{ms}^2(\theta))^{1/2}. \quad (7.1)$$

В случае главного резонанса $2\omega_m = \nu_1$ рассмотрим квадратичную форму

$$V_m(\theta) = T_m^2(\theta) + \alpha_m a_1^2(\theta), \quad \alpha_m = \frac{2c_{mm1}}{D_{mm1}} = 4 - \frac{1}{2m^2} \approx 4. \quad (7.2)$$

Из системы (5.12), (5.14) при $n = m$ следует [13], что

$$\frac{dV_m}{d\theta} = -\frac{\pi \widehat{\delta}_w}{4} T_m^2(\theta) - \frac{\alpha_m \pi \widehat{\delta}_u}{2} a_1^2(\theta). \quad (7.3)$$

Следовательно, справедливо $V_m(\theta) \leq V_m(0)$, и для главных резонансов при весьма малых начальных поперечных прогибах $T_m(0)$ получаем оценку

$$T_m(\theta) < 2a. \quad (7.4)$$

Расчеты показали, что при отсутствии расстройки длины ($\delta = 0$) и при отсутствии сопротивлений ($\widehat{\delta}_u = \widehat{\delta}_w = 0$) в некоторые моменты времени энергия продольных колебаний полностью переходит в энергию поперечных колебаний и оценка (7.4) принимает вид

$$\max_{\theta} T_m(\theta) \simeq 2a. \quad (7.5)$$

В случае комбинационного резонанса $\omega_m + \omega_n = \nu_1$ рассмотрим квадратичную форму

$$V_{mn}(\theta) = \widehat{\omega}_m T_m^2(\theta) + \widehat{\omega}_n T_n^2(\theta) + \alpha_{mn} \nu_1 a_1^2(\theta), \quad (7.6)$$

$$\alpha_{mn} = -\frac{c_{mn1}}{D_{mn1}} = \frac{4(m^2 + n^2) - 1}{8(m^2 - n^2)^2 - 2(m^2 + n^2)} > 0.$$

Из системы (5.12), (5.14) получаем

$$\frac{dV_{mn}}{d\theta} + \alpha_{mn} \nu_1^2 \widehat{\delta}_u a_1^2(\theta) + \widehat{\delta}_w (\widehat{\omega}_m^2 T_m^2(\theta) + \widehat{\omega}_n^2 T_n^2(\theta)) = 0. \quad (7.7)$$

Как и для главного резонанса, имеем $V_{mn}(\theta) \leq V_{mn}(0) = \alpha_{mn} \nu_1 a^2$, и в силу формул (5.5) для $T_m(\theta)$ и $T_n(\theta)$ получаем следующие оценки при комбинационном резонансе:

$$T_m(\theta) \leq \beta_{mn} a, \quad \beta_{mn} = \frac{\sqrt{(m^2 + n^2) \alpha_{mn}}}{m}, \quad (m \rightarrow n). \quad (7.8)$$

При $m \geq 3$, $m - 1 \geq n \geq 2$ будет $\beta_{mn} \leq 0.976$, следовательно

$$\max_{\theta} \{T_m(\theta), T_n(\theta)\} < 0.976a. \quad (7.9)$$

Сравнивая с формулой (7.4), видим, что максимальная амплитуда колебаний при комбинационных резонансах меньше, чем при главных. Отмечаем, что оценки (7.4) и (7.9) не зависят от номера m резонанса. В отличие от (7.5) уточнить оценки (7.9) не удастся, ибо распределение энергии между колебаниями с $T_m(\theta)$ и $T_n(\theta)$ в общем случае неизвестно.

В качестве примера рассмотрим главный резонанс при $m = 4$ и три комбинационных резонанса при $m = 4$, $n = 1, 2, 3$. Для амплитуды возбуждения продольных колебаний $a = 1$ и $\varepsilon_0 = 0.001$ функции $a_1(\theta)$, $T_m(\theta)$ и $T_n(\theta)$ приведены на рис. 3. Силы сопротивления не учитываются.

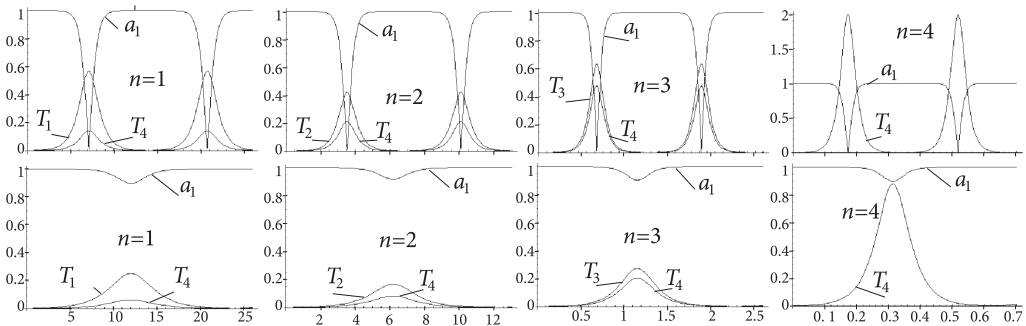


Рис. 3. Параметрические и главный резонансы при $m = 4$

На четырех верхних графиках длина стержня равна критической ($l = l_{mn}$ или $l = l_m$ для главного резонанса) и расстройка длины отсутствует ($\delta = 0$). При этом биения являются периодическими и происходит полная передача энергии продольных колебаний поперечным и наоборот. Это следует из того, что в некоторые моменты времени амплитуда продольных колебаний, а в другие моменты времени амплитуда поперечных колебаний, обращаются в нуль. При главном резонансе $\max_{\theta} T_4(\theta) = 2$, что подтверждает формулу (7.5). При параметрических резонансах амплитуды поперечных колебаний существенно меньше, чем при главном.

На четырех нижних графиках введена расстройка длины δ , равная 0.9 максимального значения, определяемого формулами (6.3) и (6.4), т.е. рассматриваемая точка на плоскости (l, ε_0) лежит вблизи границы области неустойчивости (см. рис. 2). Как следует из рис. 3, лишь небольшая часть энергии продольных колебаний участвует в обмене с энергией поперечных колебаний, которые возбуждаются существенно меньше, чем при $\delta = 0$.

Следует отметить, что отношение амплитуд $\max a_1(\theta)$, $\max T_m(\theta)$ и $\max T_n(\theta)$ в установившемся движении слабо зависит от начальных условий, наложенных на эти функции, если в начальный момент времени $|T_m(\theta)|$, $|T_n(\theta)| \ll a_1(\theta)$.

На рис. 4 показано влияние сопротивлений на главные параметрические колебания при $m = 2, 3, 4$. Если без учета сопротивлений (см. рис. 3) биения являются периодическими, при их учете убывает как амплитуда продольных колебаний, так и порождаемая ими амплитуда поперечных колебаний. С течением времени уменьшается частота биений. Энергия продольных колебаний не полностью передается поперечным колебаниям.

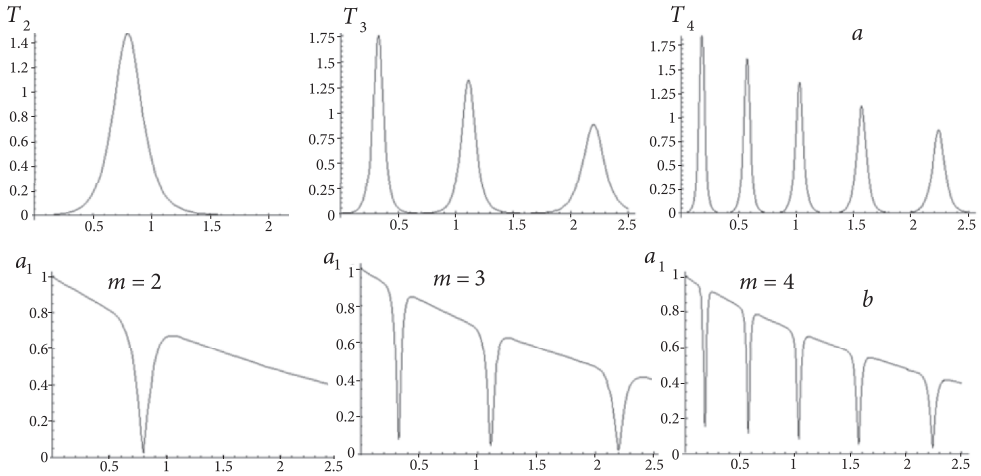


Рис. 4. Влияние сопротивления на параметрические колебания при $\varepsilon_0 = 0.001$, $a = 1$, $\widehat{\delta}_u = \widehat{\delta}_w = 0.5$

Ниже обсуждается входящая в оценки (7.4) и (7.9) амплитуда a продольных колебаний после окончания действия ударного импульса.

8. Уровень возбуждения продольных колебаний. При кратковременном импульсе будем пренебрегать силами сопротивления во время удара. Тогда с учетом (3.2) будем иметь

$$u(x, t) = \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) \cos(\nu_k x), \quad \nu_k = (k - 0.5)\pi, \quad (8.1)$$

$$\ddot{\varphi}_k + \nu_k^2 \varphi_k = 2f(t), \quad \varphi_k(0) = \dot{\varphi}_k(0) = 0.$$

После окончания удара ($f(t) \equiv 0$ при $t \geq \tau$) функции $\varphi_k(t)$ совершают гармонические колебания с амплитудами

$$a^{(k)} = (\varphi_k(\tau)^2 + (\dot{\varphi}_k(\tau)/\nu_k)^2)^{1/2}, \quad (8.2)$$

причем для главного резонанса в (7.4) и (7.9) $a = a^{(1)}$. В частности, для П-образного импульса вида (3.4) любой длительности при $\delta_u = 0$ будет выполняться

$$a^{(k)} = \frac{16}{(2k - 1)^2 \pi^2} |\sin(\nu_k \tau / 2)|, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (8.3)$$

и при малых $\tau \ll 2/\nu_k$ будем иметь

$$a^{(k)} \approx \frac{2}{\nu_k} \tau, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8.4)$$

Расчеты показывают, что для любых коротких импульсов ($\tau \ll 2/\nu_k$) имеет место аналогичное соотношение

$$a^{(k)} \approx \frac{2}{\nu_k} p, \quad p = \int_0^\tau f(t) dt. \quad (8.5)$$

О величине погрешности формулы (8.5) можно судить по рис. 5, в котором для $0 \leq \tau \leq 2$ приведены функции $a(\tau)/\tau$ для П-образного импульса (1) и для импульса $f_0(t) = (2\tau/\pi) \sin(\pi t/\tau)$ (2). Заметим, что соотношение (8.5) лучше описывает поведение последнего импульса, чем для П-образного.

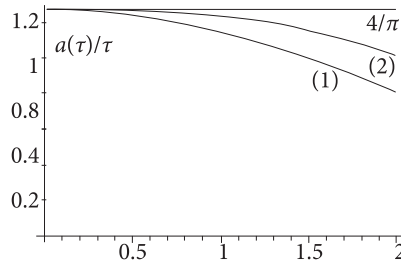


Рис. 5. Зависимость функции $a(\tau)/\tau$ от формы импульса

Из формул (8.3)–(8.5) следует, что $a^{(1)} \gg a^{(k)}$, $k \geq 2$, т. е. резонансы на обертоном возбуждаются существенно слабее главных резонансов.

9. Параметрические резонансы при длительном импульсе. Рассмотрим действие постоянной силы при $f(t) = 1$, $t \geq 0$. Исследование параметрических резонансов в этом случае имеет смысл лишь, если $\varepsilon_0 < \varepsilon_{cr}$, где $\varepsilon_{cr} = (\pi/l)^2$ — критическая деформация при осевом сжатии. Вместо (5.1) положим

$$u(x, t) = \varepsilon_0(1 - x) + \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) \cos(\nu_k x). \quad (9.1)$$

Пренебрегая при $t \leq 4$ нелинейным слагаемым и сопротивлением в первом уравнении (2.1), находим $\varphi_k(t) = -(2/\nu_k^2) \cos(\nu_k t)$, откуда по формуле (8.2) находим амплитуду колебаний $a^{(k)}$, связанную с внезапностью приложения нагрузки: $a^{(k)} = 2/\nu_k^2$, следовательно,

$$a = a^{(1)} = \frac{8}{\pi^2}. \quad (9.2)$$

При плавном приложении нагрузки амплитуда a уменьшается. Например, при $f(t) = 1 - e^{-\alpha t}$ будет

$$a = \frac{8}{\pi^2} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \pi^2/4}}. \quad (9.2')$$

Система (3.7) заменяется на (3.7'), критические длины λ_{mn} при параметрических резонансах те же, что и при кратковременном приложении нагрузки. В системе (5.14) параметр расстройки частоты δ заменяется на $\delta + (m\pi)^2$. В результате области неустойчивости на плоскости (l, ε_0) сдвигаются и наклоняются влево (см. рис. 6, на котором схематично показаны области неустойчивости для кратковременного (а) и длительного (б) импульсов), при наличии сопротивлений эти области уже не примыкают к оси $\varepsilon_0 = 0$.

Формулы (6.3) и (6.4), определяющие ширину областей неустойчивости без учета сопротивлений для комбинационного и главного резонансов принимают соответственно вид

$$\left| \delta + \frac{m^4 + n^4}{m^2 + n^2} \pi^2 \right| < K_{mn} a, \quad |\delta + m^2 \pi^2| < K_{mm} a, \quad (9.3)$$

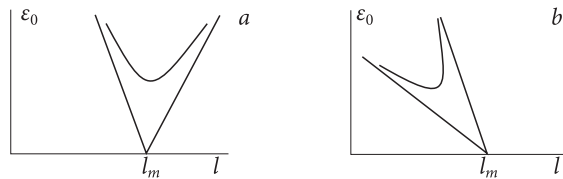


Рис. 6. Схема областей неустойчивости без учета и с учетом сопротивления для кратковременного (а) и длительного (б) импульсов

где коэффициент K_{mn} тот же, что и в формулах (6.3) и (6.4), а величина $a = a^{(1)} = 8/\pi^2$ задается формулой (9.2).

10. О скоростях роста амплитуд. При длительном внезапно приложенном импульсе, существенно превосходящем эйлерову критическую нагрузку ($\varepsilon_0 \gg \varepsilon_{cr} = \mu^2 \pi^2$), растут как амплитуды поперечных прогибов при параметрических резонансах, так и амплитуды эйлеровых форм потери устойчивости. Проведем сравнение скоростей роста амплитуд. Для эйлеровых форм потери устойчивости $w = \sin(m\pi x)$ скорости роста амплитуд α_m найдены в линейном приближении в работе [3]:

$$w(x, t) = \sin(m\pi x)e^{\alpha_m t}, \quad \alpha_m = \sqrt{\varepsilon_0 m^2 \pi^2 - \mu^2 m^4 \pi^4}, \quad m < m_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\mu \pi}, \quad (10.1)$$

причем рост амплитуды имеет место у нескольких форм потери устойчивости, а наибольшая скорость роста будет при $m \simeq m_0/\sqrt{2}$. На рис. 7 для стержня длиной $l = \mu^{-1} = 4 \cdot 5^2 \pi = 100\pi$ кривыми с номерами без звездочки (*) показаны зависимости $\alpha_m(\varepsilon_0)$ для $\varepsilon_0 \leq 0.007$. Кривыми с * показаны скорости роста амплитуд главных параметрических колебаний при $6 \leq m \leq 11$. Длина рассматриваемого стержня l является критической для параметрического резонанса при $m = 5$. Поэтому в связи с наклоном влево областей неустойчивости, показанным на рис. 6, главные параметрические резонансы при $m \leq 5$ не возбуждаются. Возбуждение же резонансов при $m \geq 6$ связано именно с этим наклоном.

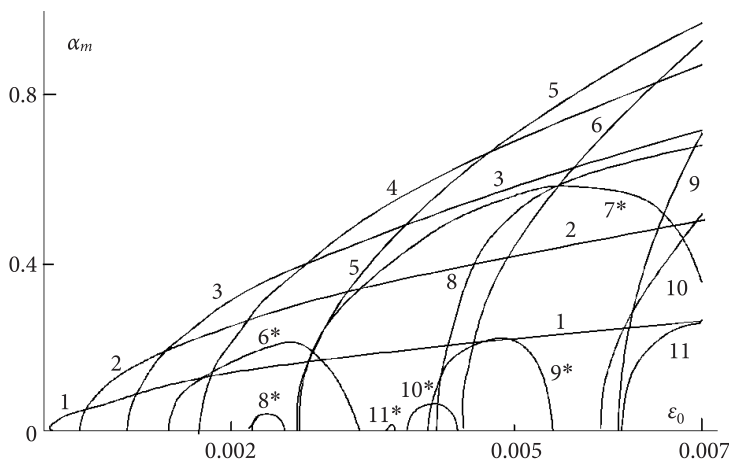


Рис. 7. Скорости роста амплитуд при эйлеровой неустойчивости и главных параметрических резонансах

Из рис. 7 следует вывод о том, что скорости роста амплитуд эйлеровых форм потери устойчивости превосходят скорости роста при параметрических резонансах. Более того, с течением времени амплитуды эйлеровых форм потери устойчивости продолжают расти, переходя при нелинейном подходе в эластики Эйлера [11], в то время как параметрические резонансы приводят к ограниченным по амплитуде биениям. Поэтому рассмотрение параметрических резонансов при $\varepsilon_0 > \varepsilon_{cr}$ не имеет практической необходимости.

В связи с этим обратимся к рассмотрению параметрических колебаний при длительных внезапно приложенных импульсах при $\varepsilon_0 < \varepsilon_{cr}$.

11. Потеря устойчивости при нагрузке, меньшей эйлеровой. Ранее этот вопрос был рассмотрен в [12] в линейной и квазилинейной постановках с помощью численного интегрирования уравнений (2.1). Здесь приводятся дополнительные результаты, полученные с использованием двухмасштабных разложений.

В силу формул (9.3), (3.4) для длительного импульса интенсивностью ε_0 для комбинационных резонансов интервалы длин стержня, в которых они реализуются, таковы:

$$\left| l - 2\pi(m^2 + n^2) + \varepsilon_0 \frac{m^4 + n^4}{m^2 + n^2} \pi^2 \right| < \varepsilon_0 K_{mn} a, \quad (11.1)$$

где $a = 8/\pi^2$, а величины K_{mn} те же, что и в формулах (6.3) и (6.4).

Имея в виду рассмотрение наиболее опасного варианта, возьмем максимально возможную деформацию ε_0 , при которой продольная устойчивость не теряется: $\varepsilon_0 = \varepsilon_{cr} = \pi^2/l^2$. Примем здесь приближенно для комбинационного резонанса $l = l_{mn}$, тогда $\varepsilon_0 = 1/(2(m^2 + n^2)^2)$, и интервалы (11.1) записываются в виде

$$\left| l - 2\pi(m^2 + n^2) \right| < \varepsilon_0 \delta = \frac{2\varepsilon_0 K_{mn}}{\pi^2(m^2 + n^2)^2}, \quad (11.2)$$

причем малое слагаемое в левой части, описывающее сдвиг влево областей неустойчивости, опущено. Интервалы для главных резонансов получаются из (11.2) при $n = m$.

Параметры возбуждения главных и комбинационных резонансов под действием внезапно приложенного длительного импульса

| m | n | ε_0 | l_{mn} | $\varepsilon_0 \delta$ |
|-----|-----|-----------------|----------|------------------------|
| 1 | 1 | 0.062 50 | 12.6 | 2.37 |
| 2 | 1 | 0.010 00 | 32.4 | 0.92 |
| 2 | 2 | 0.003 90 | 50.3 | 2.51 |
| 3 | 1 | 0.002 50 | 62.8 | 0.21 |
| 3 | 2 | 0.001 48 | 81.7 | 0.87 |
| 3 | 3 | 0.000 77 | 113.1 | 2.53 |
| 4 | 1 | 0.000 86 | 106.8 | 0.10 |
| 4 | 2 | 0.000 62 | 125.7 | 0.19 |
| 4 | 3 | 0.000 40 | 157.1 | 0.86 |
| 4 | 4 | 0.000 24 | 201.1 | 2.54 |
| 5 | 1 | 0.000 37 | 163.4 | 0.06 |
| 5 | 2 | 0.000 30 | 182.2 | 0.09 |
| 5 | 3 | 0.000 22 | 213.6 | 0.18 |
| 5 | 4 | 0.000 15 | 257.6 | 0.86 |
| 5 | 5 | 0.000 10 | 314.2 | 2.54 |

Основные параметры, описывающие параметрические резонансы при внезапном длительном возбуждении, приведены в таблице. Для $1 \leq n \leq m \leq 5$ приведены значения величин ε_0 и l_{mn} , для которых $\varepsilon_0 = \varepsilon_{cr}$. Случай $m = n = 1$ следует исключить

из рассмотрения, ибо в этом случае стержень оказывается слишком коротким для использования модели Бернулли—Эйлера. Величина $\varepsilon_0 \delta$ описывает ширину областей неустойчивости. Для главных резонансов она близка к постоянному значению 2.5, а для комбинационных — быстро убывает вместе с n .

Как уже отмечалось, случай $\varepsilon_0 > \varepsilon_{cr}$ неинтересен, ибо прогиб при эйлеровой потере устойчивости растет быстрее, чем при параметрической. Поэтому рассмотрим случай $\varepsilon_0 = \eta \varepsilon_{cr}$, $\eta < 1$, где

$$\varepsilon_{cr} = \mu^2 \pi^2 = \pi^2 / l^2 \simeq \pi^2 / l_m^2 = 1 / (16m^4). \quad (11.3)$$

Тогда формула (11.2) для главных параметрических резонансов дает области неустойчивости

$$4\pi m^2 - 3\pi\eta < l < 4\pi m^2 - \pi\eta, \quad m = 2, 3, \dots \quad (11.4)$$

Таким образом, при $\varepsilon_0 = \eta \varepsilon_{cr}$, $\eta < 1$, на плоскости параметров (l, ε_0) имеется система интервалов неустойчивости одинаковой длины.

Найдем оценку максимального прогиба при главном параметрическом резонансе. Максимальный прогиб достигается на скелетной кривой $\omega_m = m^2 \pi^2 / l = \nu_1 / 2$ или $l_m = 4\pi m^2$. Однако при длительном воздействии в силу (3.7') частоту ω следует заменить на $\omega'_m = \sqrt{(m^2 \pi^2 / l)^2 - \varepsilon_0 m^2 \pi^2}$. В результате при $\varepsilon_0 = \eta \varepsilon_{cr}$ скелетная кривая $l'_m = 4\pi m \sqrt{m^2 - \eta}$. Теперь с учетом (7.5) запишем оценку прогиба в исходных переменных $\max w(x, t) \leq 2La\varepsilon_0 = 16r\eta/l'_m$ или

$$\max w(x, t) \leq K_m r, \quad K_m = \frac{4\eta}{\pi m \sqrt{m^2 - \eta}}, \quad (11.5)$$

где r — радиус инерции поперечного сечения. Коэффициент K_m принимает наибольшее значение $K_m = 0.367$ при $m = 2$, $\eta = 1$. С ростом m , а также с уменьшением η максимальная амплитуда поперечных колебаний убывает.

Возможность появления значительных прогибов настораживает. Следует, однако, иметь в виду ряд обстоятельств, которые ведут к уменьшению прогиба. При плавном приложении нагрузки максимальный прогиб уменьшается (см. (9.2')). Силы сопротивления также ведут к уменьшению прогиба (см. рис. 4). Результаты таблицы получены в предположении, что длина стержня совпадает с центром интервала неустойчивости $l = l_{mn}$. При приближении длины к краю интервала прогибы уменьшаются (см. рис. 3).

Литература

1. Эйлер Л. Метод нахождения кривых, обладающих свойством максимума либо минимума. М.; Л.: ГТТИ, 1934.
2. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987.
3. Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Доклады АН СССР. 1949. Т. 64, № 6. С. 776–782.
4. Вольмир А. С. Устойчивость сжатых стержней при динамическом нагружении // Строит. мех. и расчет сооружений. 1960. № 1. С. 6–9.
5. Болотин В. В. Поперечные колебания и критические скорости // Изд. АН СССР. Т. 1 (1951), Т. 2 (1953).
6. Морозов Н. Ф., Товстик П. Е. Динамика стержня при продольном ударе // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 2. С. 105–111.
7. Беляев А. К., Ильин Д. Н., Морозов Н. Ф. Динамический подход к задаче Ишлинского—Лаврентьева // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2013. № 5. С. 28–33.

8. Морозов Н. Ф., Товстик П. Е. Динамика стержня при кратковременном продольном ударе // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2013. Вып. 3. С. 131–141.
9. Морозов Н. Ф., Товстик П. Е. Поперечные колебания стержня, вызванные продольным ударом // Доклады АН. 2013. Т. 452, № 1. С. 37–41.
10. Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П. Статика и динамика стержня при продольном нагружении // Вестник Южно-Уральского ун-та. Сер. мат. модел. и прогр. 2014. Т. 7, № 1. С. 76–89.
11. Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П. Еще раз о задаче Ишлинского—Лаврентьева // ДАН. 2014, 455(4). С. 412–415.
12. Морозов Н. Ф., Товстик П. Е. О динамической потере устойчивости стержня при продольной нагрузке, меньшей эйлеровой // Доклады АН. 2014. Т. 453, № 3. С. 282–285.
13. Беляев А. К., Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П. Биения в задаче о продольном ударе по тонкому стержню // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 4.
14. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1969.
15. Пальмов В. А. Колебания упругопластических тел. М.: Наука, 1976.
16. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
17. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 720 с.

Статья поступила в редакцию 22 октября 2015 г.

Сведения об авторах

Беляев Александр Константинович — доктор физико-математических наук, профессор; vice.ipme@gmail.com

Морозов Никита Федорович — академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор; morozov@nm1016.spb.edu

Товстик Петр Евгеньевич — доктор физико-математических наук, профессор; peter.tovstik@mail.ru

Товстик Татьяна Петровна — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник; tovstik_t@mail.ru

PARAMETRIC RESONANCES IN THE PROBLEM OF LONGITUDINAL IMPACT ON A THIN ROD

Alexander K. Belyaev¹, Nikita F. Morozov², Petr E. Tovstik², Tatiana P. Tovstik¹

¹ Institute of Mechanical Engineering RAS, Bolshoy pr. V. O., 61, St. Petersburg, 199178, Russian Federation; vice.ipme@gmail.com, tovstik_t@mail.ru

² St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; morozov@nm1016.spb.edu, peter.tovstik@mail.ru

A longitudinal impact on a thin elastic rod generating a periodic system of longitudinal waves is addressed. Linear problem is considered and for certain values of parameters these waves are shown to generate parametric resonance accompanied by unbounded increase in the amplitude of transverse oscillations. In order to obtain the finite values of amplitudes we consider a quasi-linear system that takes into account the influence of transverse vibrations on the axial ones. In the earlier research this system was numerically solved by the Bubnov—Galerkin approach which resulted in beats displaying the exchange of energy between the axial and transverse oscillations. This paper presents an approximate analytic solution to this systems based on the two-scale expansions is constructed. A qualitative analysis is carried out, too. We obtained an estimate of the maximum transverse deflection depending upon the method of loading. Both the short-term and long-term axial loading are analysed. Intensive transverse vibrations are found out to appear in the case of a suddenly applied axial pulse with the magnitude below the critical Euler force. Refs 17. Figs 7. Tables 1.

Keywords: rod, axial impact, lateral bending, parametric resonances.

References

1. Euler L., *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti* (Springer, 1952).

2. Panovko Ya. G., Gubanova I. I., *Stability and Oscillations of Elastic Systems* (Nauka, Moscow, 1987) [in Russian].
3. Lavrent'ev M. A., Ishlinsky A. Ju., "Dynamic modes of stability loss of elastic systems", *Doklady AN SSSR* **64**(6), 776–782 (1949) [in Russian].
4. Vol'mir A. S., "Stability of compressed rods under dynamic loading", *Stroit. mekh. & raschet sooruzhenii* (1), 6–9 (1960) [in Russian].
5. Bolotin V. V., "Transverse Vibrations and Critical Velocities", *AN SSSR* (Moscow, 1951, Vol. 1, 1953, Vol. 2) [in Russian].
6. Morozov N. F., Tovstik P. E., "Dynamics of rod under longitudinal impact", *Vestnik St. Petersburg Univ. Ser. 1* Issue 2, 105–111 (2009) [in Russian].
7. Belyaev A. K., Il'in D. N., Morozov N. F., "Dynamic approach to the Ishlinsky–Lavrent'ev problem", *Mechanics of Solids* **48**(5), 504–508 (2013).
8. Morozov N. F., Tovstik P. E., "Dynamics of rod under a short-term longitudinal impact", *Vestnik St. Petersburg Univ. Ser. 1*, Issue 3, 131–141 (2013) [in Russian].
9. Morozov N. F., Tovstik P. E., "Transverse rod vibrations under a short-term longitudinal impact", *Doklady Physics* **58**(9), 387–391 (2013).
10. Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P., "Static and dynamic of a rod at the longitudinal loading", *Vestnik of South Ural State Univ. Ser. math. model & progr.* **7**(1), 76–89 (2014) [in Russian].
11. Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P., "Again on the Ishlinskii–Lavrentyev problem", *Doklady Physics* **59**(4), 189–192 (2014).
12. Morozov N. F., Tovstik P. E., "Dynamic loss of stability of a rod under longitudinal load lower than the Eulerian load", *Doklady physics* **58**(11), 510–513 (2013).
13. Belyaev A. K., Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P., "Beatings in the problem of longitudinal impact on thin rod", *Mechanics of Solids* **50**(4) (2015).
14. Bogoliubov N. N., Mitropolsky Yu. A., *Asymptotic Method in the Theory of Nonlinear Oscillations* (Gordon and Breach, New York, 1961).
15. Palmov V. A., *Vibrations of Elastoplastic Bodies* (Springer, Foundations of Engineering Mechanics, 1998).
16. Lyapunov A. M., *The General Problem of the Stability of Motion* (Taylor & Francis, London, 1992).
17. Yakubovich V. A., Starzhinskiy V. M., *Linear differential equations with periodic coefficients and their applications* (Nauka, Moscow, 1972) [in Russian].