

## О СПЕКТРЕ ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАН И ПЛАСТИН, НАХОДЯЩИХСЯ В КОНТАКТЕ С ЖИДКОСТЬЮ\*

Д. Н. Иванов<sup>1</sup>, Н. В. Наумова<sup>1</sup>, В. С. Сабанеев<sup>1</sup>, П. Е. Товстик<sup>1</sup>, Т. П. Товстик<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,

Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

<sup>2</sup> Институт проблем машиноведения РАН (ИПМаш РАН),

Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

Рассматривается контейнер в форме параллелепипеда, полностью заполненный идеальной несжимаемой жидкостью. Контейнер закрыт упругой крышкой, которая моделируется мембраной или пластиной постоянной толщины. Остальные грани контейнера недеформируемы. Построен спектр частот малых свободных колебаний крышки с учетом присоединенной массы жидкости, движение которой предполагается потенциальным. Основная особенность постановки задачи заключается в том, что при колебаниях объем жидкости под крышкой не меняется. В результате форма прогиба крышки должна удовлетворять уравнению связи, вытекающему из условия сохранения объема жидкости под крышкой. Библиогр. 11 назв. Ил. 5.

*Ключевые слова:* мембрана, пластина, несжимаемая жидкость в контейнере, свободные колебания со связью.

**1. Введение.** Рассматриваемая модельная задача относится к обширному классу задач динамической гидроупругости. К этим задачам приходим в судостроении, авиации, при транспортировке жидкостей, при описании природных явлений и во многих других случаях. Различные подходы к решению таких задач, а также обширную библиографию можно найти в монографиях [1–4]. В качестве первых исследований назовем работу Рэля [5] о волнах в бесконечной пластине, контактирующей с жидкостью, и работу Лэмба [6] о колебаниях круглой пластины в воде. Колебания упругих тел в сжимаемой жидкости сопровождаются излучением звуковых волн [4], колебания пластин на поверхности жидкости порождают поверхностные волны [7]. Эти волны уносят энергию колебаний, что приводит к комплексному спектру. Спектр частот колебаний упругих контейнеров, содержащих идеальную несжимаемую жидкость, является вещественным и дискретным [1]. При этом, как правило, рассматриваются задачи, в которых жидкость имеет свободную поверхность [8, 9].

Ниже рассматривается контейнер в форме прямоугольного параллелепипеда, полностью заполненный несжимаемой жидкостью и закрытый упругой прямоугольной крышкой. Крышка моделируется упругой мембраной или пластиной с шарнирно опертыми сторонами. Изучается спектр частот свободных колебаний этой крышки (вместе с жидкостью) при условии, что при колебаниях объем жидкости под крышкой не меняется. Это условие порождает связь, которой должна удовлетворять форма прогиба крышки. При наличии аналогичной связи на форму прогиба также построен спектр частот колебаний струны и балки.

Близкая постановка задачи принята в [10]. В ней ограничение на форму прогиба крышки (пластины) не вводится, однако рассмотрение графиков собственных функций, приведенных в [10], говорит о том, что условие сохранения объема жидкости под крышкой выполнено. В рассматриваемых задачах предполагается, что характерный период свободных колебаний существенно больше времени пробега волны объемной деформации жидкости. Поэтому жидкость считается несжимаемой.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13.01.00523а).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2016

**2. Колебания мембраны с жидкостью.** Рассмотрим контейнер в форме параллелепипеда  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $0 \leq z \leq c$ , полностью заполненный идеальной несжимаемой жидкостью. На грань  $z = 0$  натянута мембрана с натяжением  $T$ . Остальные грани контейнера неподвижные и гладкие. Нужно найти спектр частот колебаний мембраны с учетом присоединенной массы жидкости. Скорость точек мембраны совпадает с нормальной скоростью жидкости при  $z = 0$  и равна  $V_z(x, y, 0, t) = \psi(x, y) \sin(\omega t)$ .

Разложим функцию  $\psi(x, y)$  в двойной ряд Фурье:

$$\psi(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \psi_{mn} \cos p_m x \cos q_n y, \quad \psi_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \psi(x, y) \cos p_m x \cos q_n y dx dy, \quad (2.1)$$

где  $p_m = m\pi/a$ ,  $q_n = n\pi/b$ . Тогда потенциал скоростей жидкости, удовлетворяющий уравнению Лапласа и указанным выше граничным условиям, после отделения множителя  $\sin \omega t$  имеет вид

$$\Phi(x, y, z) = - \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\psi_{mn}}{r_{mn}} \cos p_m x \cos q_n y \frac{\cosh(r_{mn}(z-c))}{\sinh(r_{mn}c)}, \quad r_{mn}^2 = p_m^2 + q_n^2. \quad (2.2)$$

Кинетическая энергия жидкости

$$T_f = \frac{\rho_f}{2} \int_0^a \int_0^b \int_0^c (\Phi_{,x}^2 + \Phi_{,y}^2 + \Phi_{,z}^2) dx dy dz = \frac{\rho_0 ab}{8} \sum_{m,n=1}^{\infty} q_{mn} \psi_{mn}^2, \quad q_{mn} = \frac{\coth(r_{mn}c)}{r_{mn}}, \quad (2.3)$$

где  $\rho_f$  — плотность жидкости.

Наряду с разложением (2.1) в связи с условиями закрепления мембраны  $\psi = 0$  при  $x = 0, a$  и при  $y = 0, b$  представим функцию  $\psi(x, y)$  в виде

$$\psi(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn} \sin p_m x \sin q_n y, \quad (2.4)$$

причем коэффициенты  $\psi_{mn}$  и  $u_{mn}$  связаны соотношениями

$$\psi_{\hat{m}\hat{n}} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{\hat{m}m} \alpha_{\hat{n}n} u_{mn}, \quad \alpha_{\hat{m}m} = \frac{2m(1 - (-1)^{\hat{m}+m})}{\pi(m^2 - \hat{m}^2)}. \quad (2.5)$$

Требование несжимаемости жидкости накладывает связь на функцию  $\psi(x, y)$ :

$$\int_0^a \int_0^b \psi(x, y) dx dy = \frac{ab}{\pi^2} \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn} \gamma_{mn} = 0, \quad \gamma_{mn} = \frac{(1 - (-1)^m)(1 - (-1)^n)}{4mn}. \quad (2.6)$$

Частоты и формы колебаний определяются при минимизации по  $\psi$  функционала

$$J_* = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (T(\psi_{,x}^2 + \psi_{,y}^2) + \rho_f g \psi^2 - \lambda \rho \psi^2) dx dy - \lambda T_f - \mu \int_0^a \int_0^b \psi(x, y) dx dy, \quad (2.7)$$

где  $\lambda = \omega^2$ ,  $\omega$  — искомая частота свободных колебаний,  $\mu$  — множитель Лагранжа. Слагаемое  $\rho_f g \psi^2$  учитывает вес жидкости и вводится лишь в случае, когда колеблющаяся мембрана расположена горизонтально ( $g$  — ускорение свободного падения),

$\rho$  — поверхностная плотность мембраны. После интегрирования получаем

$$J_* = \frac{ab}{8} \left( \sum_{m,n=1}^{\infty} (Tr_{mn}^2 + \rho_f g - \lambda \rho) u_{mn}^2 - \lambda \rho_f \sum_{\hat{m}, \hat{n}=1}^{\infty} q_{\hat{m}\hat{n}} \psi_{\hat{m}\hat{n}}^2 \right) - \mu \frac{ab}{\pi^2} \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn} \gamma_{mn}. \quad (2.8)$$

Дифференцирование по  $u_{mn}$  дает

$$\frac{4}{ab} \frac{\partial J_*}{\partial u_{mn}} = (Tr_{mn}^2 + \rho_f g - \lambda \rho) u_{mn} - \lambda \rho_f \sum_{r,s=1}^{\infty} \beta_{mn}^{rs} u_{rs} - \hat{\mu} \gamma_{mn} = 0, \quad m, n = 1, 2, \dots, \quad (2.9)$$

$$\beta_{mn}^{rs} = \sum_{\hat{m}, \hat{n}=1}^{\infty} q_{\hat{m}\hat{n}} \alpha_{\hat{m}m} \alpha_{\hat{n}n} \alpha_{\hat{m}r} \alpha_{\hat{n}s}, \quad \hat{\mu} = \frac{ab}{4\pi^2} \mu. \quad (2.10)$$

В силу (2.5) коэффициенты  $\alpha_{rs} = 0$ , если сумма индексов  $r + s$  четная, а  $\gamma_{mn} = 0$ , если хотя бы один индекс четный. Поэтому система (2.9) распадается на 4 подсистемы ( $m$  и  $n$  нечетные;  $m$  и  $n$  четные;  $m$  четное,  $n$  нечетное;  $m$  нечетное,  $n$  четное).

Первая подсистема имеет вид

$$(Tr_{mn}^2 + \rho_f g - \lambda \rho) u_{mn} - \lambda \rho_f \sum_{r,s=1,3,\dots} \beta_{mn}^{rs} u_{rs} - \frac{\hat{\mu}}{mn} = 0, \quad m, n = 1, 3, \dots, \quad \sum_{m,n=1,3,\dots} \frac{u_{mn}}{mn} = 0, \quad (2.11)$$

а у остальных подсистем отсутствует последнее слагаемое.

Приведем систему (2.9) к безразмерному виду. Пусть  $a \leq b$ . Величину  $a$  примем за единицу длины. Положим

$$\begin{aligned} \hat{p}_m^2 &= m^2, \quad \hat{q}_n^2 = n^2 \delta, \quad \delta = (a/b)^2 \leq 1, \quad \hat{r}_{mn}^2 = m^2 + \delta n^2, \quad \hat{q}_{mn} = \frac{\coth(\hat{r}_{mn} \hat{c})}{\hat{r}_{mn}}, \quad \hat{c} = \frac{\pi c}{a}, \\ \lambda &= \frac{T\pi^2}{a^2} \hat{\lambda}, \quad \hat{\rho}_f = \frac{\rho_f a}{\pi \rho} = \frac{\rho_f a}{\pi \rho_p h}, \quad \hat{g} = \frac{\rho_f g a^2}{T\pi^2}, \quad \hat{\beta}_{mn}^{rs} = \sum_{\hat{m}, \hat{n}=1}^{\infty} \hat{q}_{\hat{m}\hat{n}} \alpha_{\hat{m}m} \alpha_{\hat{n}n} \alpha_{\hat{m}r} \alpha_{\hat{n}s}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Тогда система (2.9) переписется в виде

$$\left( \hat{r}_{mn}^2 + \hat{g} - \hat{\lambda} \right) u_{mn} - \hat{\lambda} \hat{\rho}_f \sum_{r,s} \hat{\beta}_{mn}^{rs} u_{rs} - \hat{\mu} \gamma_{mn} = 0, \quad (2.13)$$

причем индексы у неизвестных  $u_{mn}$  принимают четные или нечетные значения в зависимости от рассматриваемой подсистемы.

При вычислении  $\hat{\lambda}_{m_0 n_0}$  рассматриваем конечную систему (2.13) при  $m, n \leq K$  и бесконечные суммы заменяем конечными, причем число  $K > \max(m_0, n_0)$  подбирается из условия получения заданной точности величины  $\hat{\lambda}_{m_0 n_0}$ .

Система (2.10) содержит ряд частных случаев.

Через параметр  $\hat{\rho}_f$ , в котором  $\rho_f / \rho_p$  — отношение объемных плотностей жидкости и мембраны,  $h$  — толщина мембраны, учитывается присоединенная масса жидкости. В связи с тем, что  $a/h \gg 1$ , параметр  $\hat{\rho}_f$  может быть большим. Если пренебрегаем присоединенной массой жидкости, следует считать  $\hat{\rho}_f = 0$ .

Случай  $\hat{c} \gg 1$  соответствует бесконечной глубине  $c$ , при этом  $q_{mn} = 1/r_{mn}$ .

Если  $a \ll b$ , можно считать  $\delta = 0$ , что соответствует переходу к плоской постановке задачи — колебаниям струны.

С незначительными изменениями систему (2.13) можно использовать и в случае, когда мембрана заменена шарнирно опертой по всем краям пластиной. В этом случае величину  $\hat{r}_{mn}^2$  в первом слагаемом уравнений (2.13) следует заменить на  $\hat{r}_{mn}^4$  и вместо (2.9) считать

$$\lambda = \frac{Da^4 \hat{\lambda}}{\rho \pi^4}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \hat{g} = \frac{\rho_f g a^2}{T \pi^2}, \quad (2.14)$$

где  $D$  — цилиндрическая жесткость,  $h$  — толщина,  $E, \nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона пластины.

Для других вариантов закрепления пластины вид системы (2.13) сохраняется, однако коэффициенты (особенно связанные с формулой (2.5)) изменяются. Дополнительная трудность заключается в том, что при граничных условиях, отличных от шарнирного опирания, формы колебаний пластины не имеют аналитического представления.

При  $\delta = 0$  происходит переход от колебаний пластины к колебаниям балки-полоски в жидкости.

Рассматриваемая задача имеет две особенности — учет несжимаемости, приводящий к появлению ограничения на прогиб (связи), и учет влияния присоединенной массы жидкости. В разделе 3 на примере простейшей задачи о свободных колебаниях струны (балки) без учета присоединенной массы прослеживается влияние связи на частоты и формы свободных колебаний. Эта задача имеет явное решение. Помимо самостоятельного значения эта модельная задача способствует обсуждению более сложных задач, рассмотренных в разделах 2, 4, 5.

**3. Колебания струны при наличии связи.** Уравнение свободных колебаний струны длины  $a$  имеет вид

$$T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho \omega^2 = 0, \quad w(0) = w(a) = 0, \quad (3.1)$$

где  $T$  — натяжение,  $\rho$  — масса единицы длины струны,  $\omega$  — частота колебаний. Найдем спектр частот собственных колебаний струны при наличии связи

$$\int_0^a w(x) dx = 0. \quad (3.2)$$

Частоты и формы свободных колебаний при отсутствии связи имеют вид

$$\omega_m = \omega_* m, \quad \omega_* = \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad \varphi_m(x) = \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Разложим искомую форму колебаний в ряд по функциям (3.3):

$$w = \psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m \varphi_m(x). \quad (3.4)$$

Тогда задача минимизации функционала (2.8) запишется в виде

$$\min_{u_m} \sum_{m=1}^{\infty} (\omega_m^2 u_m^2 - \lambda u_m^2 - \mu c_m u_m), \quad c_m = \int_0^a \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 2a/(m\pi), & m = 1, 3, \dots, \\ 0, & m = 2, 4, \dots, \end{cases} \quad (3.5)$$

где  $\lambda = \omega^2$  — искомые квадраты частот колебаний,  $\mu$  — множитель Лагранжа. Получаем

$$(\omega_m^2 - \lambda)u_m = c_m\mu/2. \quad (3.6)$$

В силу (3.5) при четных  $m$  частоты и формы колебаний при наличии связи остаются прежними, а при нечетных  $m$  подстановка  $u_m$  в уравнение связи дает уравнение для  $\lambda$

$$\sum_{m=1,3,\dots}^K \frac{1}{m^2(\omega_m^2 - \lambda)} = 0 \quad (3.7)$$

или в безразмерном виде

$$\sum_{m=1,3,\dots}^K \frac{1}{m^2(m^2 - \hat{\lambda})} = 0, \quad \lambda = \omega_*^2 \hat{\lambda}. \quad (3.8)$$

Корням  $\hat{\lambda}_k$  уравнения (3.8) отвечают формы колебаний

$$\psi_k(x) = \sum_{m=1,3,\dots}^K \frac{\varphi_m(x)}{m(m^2 - \hat{\lambda}_k)}. \quad (3.9)$$

Первые корни равны  $\hat{\omega}_k = \sqrt{\hat{\lambda}_k} = 2.8606, 4.9181, 6.9418, 8.9548$ . Имеет место асимптотическая формула  $\hat{\omega}_k = 2k + 1 - 0.405/(2k + 1) + O(k^{-2})$ ,  $k \rightarrow \infty$ .

Итак, при наличии связи первая частота (3.3) исчезает, при четных  $m$  частоты не меняются, а при нечетных  $m$  уменьшаются и вместо  $3, 5, \dots$  принимают приведенные выше значения  $\hat{\omega}_m$ .

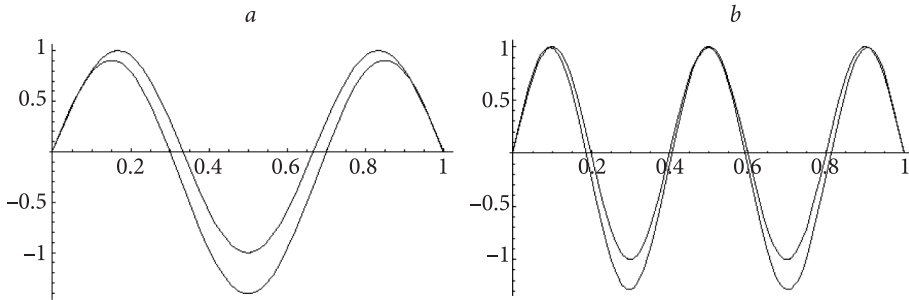


Рис. 1. Две первые собственные функции

На рис. 1, *a* показаны две первые собственные функции  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$ , нормированные по формуле  $\int_0^1 \psi_k^2(x) dx = 1/2$ , и, для сравнения, похожие на них формы колебаний  $\sin(3\pi x)$  и  $\sin(5\pi x)$  для струны без учета связи (3.2) (рис. 1, *b*).

Колебания шарнирно опертой балки при наличии связи (3.2) исследуются по той же схеме. Различие заключается в том, что для балки вместо (3.3)

$$\omega_m = \omega_* m^2, \quad \omega_* = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}}, \quad (3.10)$$

где  $EI$  — жесткость на изгиб. Для нечетных  $m$  безразмерный параметр частоты  $\hat{\lambda}$  находится из уравнения

$$\sum_{m=1,3,\dots} \frac{1}{m^2(m^4 - \hat{\lambda})} = 0, \quad \lambda = \omega_*^2 \hat{\lambda}, \quad (3.11)$$

и первые корни этого уравнения  $\hat{\omega}_k = \sqrt{\hat{\lambda}_k}$ , равные 8.541, 24.566, 48.375, 80.55, близки к квадратам нечетных чисел  $(2k + 1)^2$ . Формы свободных колебаний балки при наличии связи близки к аналогичным формам для струны. Их графики не приводятся, ибо они визуально неотличимы от показанных на рис. 1.

**4. Колебания струны при наличии связи с учетом присоединенной массы жидкости.** Фактически рассматривается плоское движение мембраны и жидкости в плоскостях, параллельных  $Oxz$ . Уравнение (2.9) с учетом  $\delta \rightarrow 0$  переписывается в виде

$$(T\rho_m^2 - \lambda\rho)u_m - \lambda\rho_f \sum_{r=1}^{\infty} \beta_m^r u_r - \mu c_m = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (4.1)$$

где

$$\beta_m^r = \sum_{\hat{m}=1}^{\infty} q_{\hat{m}} \alpha_{\hat{m}m} \alpha_{\hat{m}r}, \quad q_{\hat{m}} = \frac{a}{\hat{m}\pi} \coth(\hat{m}\pi c/a).$$

Как и в общем случае, система (4.1) распадается на две подсистемы — для четных и для нечетных  $m$ , ибо  $b_m^r = 0$ , если индексы  $m$  и  $r$  имеют разную четность.

В безразмерном виде система (4.1) имеет вид

$$(m^2 - \hat{\lambda}) u_m - \hat{\lambda} \hat{\rho}_f \sum_{r=1}^{\infty} \hat{\beta}_m^r u_r - \mu c_m = 0, \quad (4.2)$$

где  $\hat{\beta}_m^r = (\beta_m^r \pi/a)$ , а остальные обозначения те же, что в (2.12).

Рассмотрим сначала систему (4.2) при четных  $m$ . В этом случае  $c_m = 0$ , система (4.2) принимает вид

$$(m^2 - \hat{\lambda}) u_m - \hat{\lambda} \hat{\rho}_f \sum_{r=2,4,\dots} \hat{\beta}_m^r u_r = 0, \quad m = 2, 4, \dots, \quad (4.3)$$

где

$$\hat{\beta}_m^r = \frac{16mr}{\pi^2} \sum_{\hat{m}=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\coth(\hat{m}\hat{c})}{\hat{m}(m^2 - \hat{m}^2)(r^2 - \hat{m}^2)}, \quad \hat{c} = \frac{\pi c}{a}. \quad (4.4)$$

Собственные значения  $\hat{\lambda}_k$  параметра  $\hat{\lambda}$  являются корнями определителя системы (4.3). Безразмерные собственные частоты  $\hat{\omega}_k = \sqrt{\hat{\lambda}_k}$  зависят от двух безразмерных параметров  $\hat{c}$  и  $\hat{\rho}_f$ . При уменьшении  $\hat{c}$  частоты уменьшаются, а с ростом  $\hat{c}$  стремятся к предельным значениям, соответствующим глубокому сосуду. С ростом  $\hat{\rho}_f$  масса мембраны перестает влиять на частоты, которые при  $\hat{\rho}_f \gg 1$  убывают пропорционально  $1/\sqrt{\hat{\rho}_f}$ . На рис. 2, а, с для двух первых корней уравнения (4.3) приведены графики функций  $\hat{\omega}_k(\hat{\rho}_f)$  для  $\hat{c} = 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4$ . Видим, что для первого корня увеличение  $\hat{c}$  перестает влиять на  $\hat{\omega}$  при  $\hat{c} = 2$ , а для второго — при  $\hat{c} = 1$ .

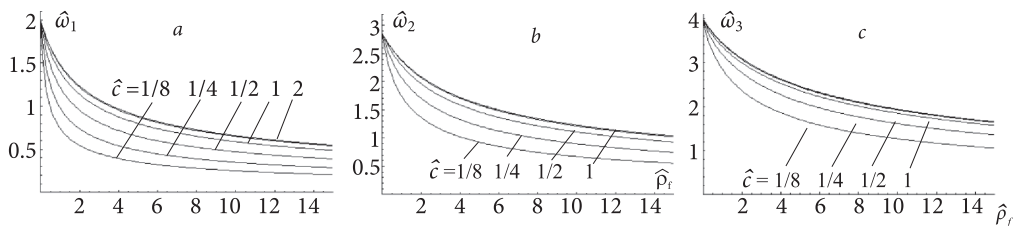


Рис. 2. Зависимости безразмерных частот от параметра присоединенной массы для ряда значений параметра глубины сосуда

При нечетном  $m$  будет  $c_m \neq 0$  и дополнительно должно быть выполнено уравнение связи, вытекающее из условия несжимаемости жидкости. Вместо (4.3), (4.4) имеем

$$(m^2 - \hat{\lambda}) u_m - \hat{\lambda} \hat{\rho}_f \sum_{r=1,3,\dots} \hat{\beta}_m^r u_r - \frac{\mu}{m} = 0, \quad m = 1, 3, \dots, \quad \sum_{m=1,3,\dots} \frac{u_m}{m} = 0, \quad (4.5)$$

где

$$\hat{\beta}_m^r = \frac{16mr}{\pi^2} \sum_{\hat{m}=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\coth(\hat{m}\hat{c})}{\hat{m}(m^2 - \hat{m}^2)(r^2 - \hat{m}^2)}.$$

Собственные значения  $\hat{\lambda}_k$  являются корнями определителя линейной системы (4.5) относительно неизвестных  $u_1, u_3, \dots, u_{2K-1}, \mu$ . Как и без учета присоединенной массы, корни этого уравнения лежат между корнями определителя системы (4.3). Для первого корня зависимость  $\hat{\omega}(\hat{\rho}_f, \hat{c})$  приведена на рис. 2, б.

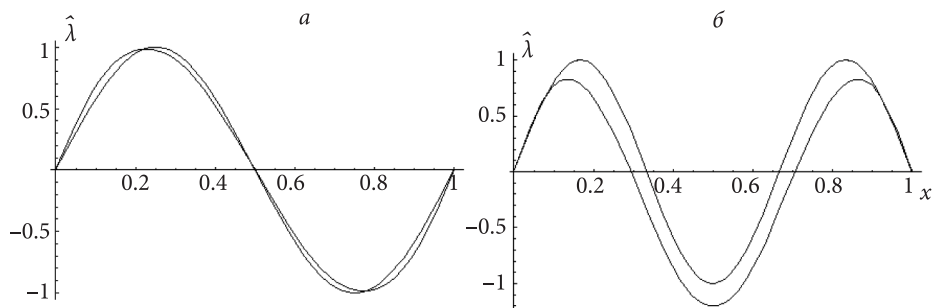


Рис. 3. Сравнение форм прогиба без учета и с учетом присоединенной массы жидкости при  $\hat{c} = 0.5$ ,  $\hat{\rho}_f = 10$

На рис. 3, а приведена первая форма прогиба, найденная из системы (4.2), и, для сравнения, график функции  $\sin(2\pi x)$ , а на рис. 3, б — форма прогиба, найденная из системы (4.5), и график функции  $\sin(3\pi x)$ . Из рис. 3, а и сравнения рис. 3, б и рис. 1, а следует, что учет присоединенной массы жидкости незначительно влияет на форму прогиба, а несжимаемость влияет более существенно.

**5. Преобразование системы (2.13) и численные результаты.** Как отмечалось в разделе 2, задача о колебаниях мембраны с жидкостью в зависимости от волновых чисел  $m$  и  $n$  распадается на четыре отдельные подзадачи. Если хотя бы

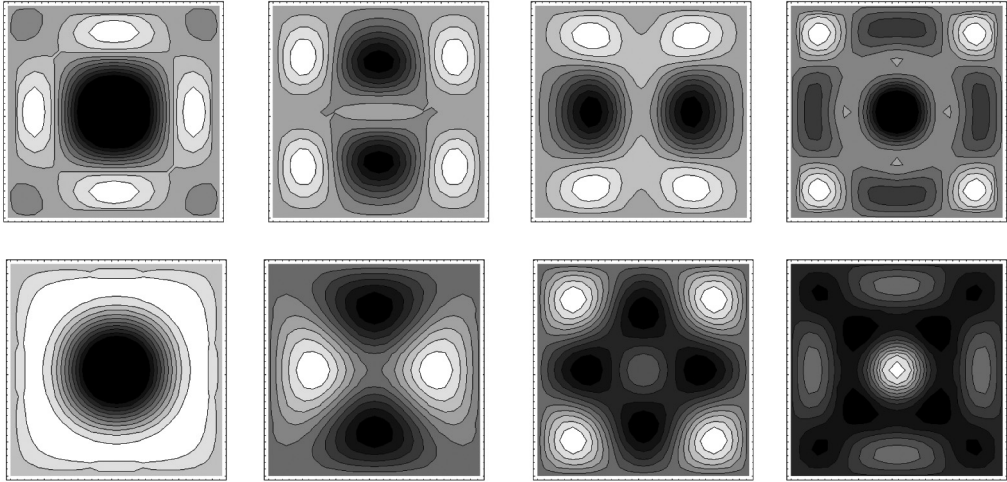


Рис. 4. Формы прогиба мембраны (вверху) и пластины

одно из этих чисел четное, то уравнение связи, вытекающее из условия несжимаемости жидкости, выполнено автоматически. Расчеты показывают, что формы свободных колебаний близки к колебаниям функций  $\varphi_{mn} = \sin p_m x \sin q_n y$  подобно тому, как близки кривые на рис. 3, а. Безразмерные частоты  $\hat{\omega}_{mn}$  зависят от параметров  $\hat{\rho}_f$ ,  $\hat{c}$ ,  $\delta$  и  $\hat{g}$ . Без учета влияния жидкости частоты равны  $\hat{\omega}_{mn} = \hat{r}_{mn} = \sqrt{m^2 + \delta n^2}$ , а с учетом присоединенной массы зависимость частот  $\hat{\omega}_{mn}$  от параметров  $\hat{\rho}_f$  и  $\hat{c}$  в качественном отношении такая же, как показано на рис. 1 для струны.

Остановимся подробнее на случае, когда оба индекса  $m$  и  $n$  нечетные. Параметры

$$\hat{r}_{mn} = \sqrt{m^2 + \delta n^2}, \quad m, n = 1, 3, \dots, \quad (5.1)$$

перенумеруем в порядке возрастания:

$$\hat{r}_1 = \hat{r}_{m_1 n_1} \leq \hat{r}_2 = \hat{r}_{m_2 n_2} \leq \dots \leq \hat{r}_k = \hat{r}_{m_k n_k} \leq \dots \quad (5.2)$$

Тогда индексы  $m_k$  и  $n_k$  будут зависеть от места  $k$ , которое величины  $\hat{r}_{mn}$  занимают в последовательности (5.2). Запишем систему (2.13) с одним индексом суммирования:

$$\left(\hat{r}_k^2 - \hat{\lambda}\right) u_k - \hat{\lambda} \hat{\rho}_f \sum_{l=1}^{\infty} \hat{\beta}_k^l u_l - \mu \gamma_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k u_k = 0, \quad (5.3)$$

где

$$\hat{\beta}_k^l = \left(\frac{4}{\pi}\right)^4 \sum_{m, n=2, 4, \dots}^{\infty} \frac{m_k n_k m_l n_l \coth(\hat{r}_{mn} c)}{\hat{r}_{mn} (m_k^2 - m^2) (n_k^2 - n^2) (m_l^2 - m^2) (n_l^2 - n^2)}, \quad \gamma_k = \frac{1}{m_k n_k}. \quad (5.4)$$

В качестве примера рассмотрим квадратную мембрану ( $\delta = 1$ ) с параметрами  $\hat{c} = 1.5$ ,  $\hat{\rho}_f = 10$ . Для нечетных  $m$  и  $n$  первые четыре безразмерные частоты  $\hat{\omega}$ , найденные из системы (5.3) при  $\hat{g} = 0$ , равны 1.791; 2.738; 2.742; 3.558, а соответствующие формы прогиба показаны в верхней части рис. 4. Для сравнения в нижней части этого рисунка приведены аналогичные формы для квадратной пластины (с частотами



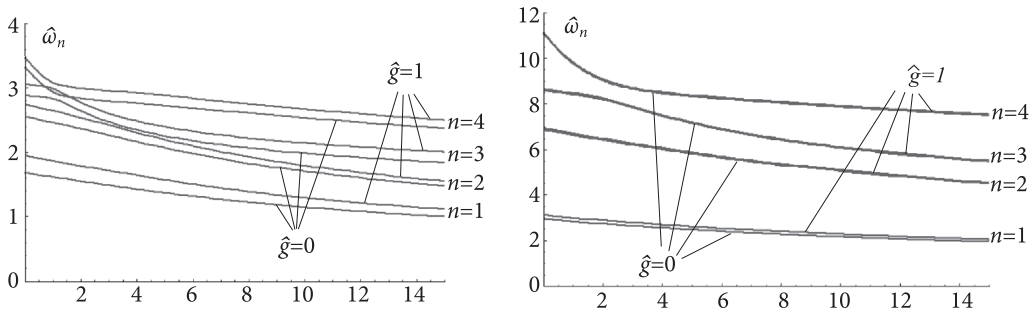


Рис. 5. Зависимости  $\hat{\omega}_n(\hat{\rho}_f)$  для первых четырех частот

$\hat{\omega} = 5.840; 9.016; 11.224; 19.12$ ). Эти частоты и формы получены из системы (5.3) после замены в ней  $\hat{r}_k^2$  на  $\hat{r}_k^4$ . Видим, что формы колебаний мембраны и пластины в жидкости заметно различаются, в то время как в воздухе они идентичны.

При фиксированном значении  $\delta$  все безразмерные частоты растут с ростом  $\hat{g}$ , уменьшаются с ростом  $\hat{\rho}_f$  и  $\hat{c}$ , что следует из теоремы Куранта [11] о минимально-максимальном свойстве собственных значений. При этом при  $\hat{\rho}_f \gg 1$  частоты растут как  $\sqrt{\hat{\rho}_f}$ , а при  $\hat{c} \geq 3$  частоты близки к своим значениям для бесконечно глубокой жидкости ( $\hat{c} = \infty$ ).

На рис. 5 приведены зависимости  $\hat{\omega}_n(\hat{\rho}_f)$  для первых четырех частот дважды нечетной группы для мембраны (вверху) и для пластины (внизу) при  $\delta = 0.25$ ,  $\hat{c} = 1.5$  без учета ( $\hat{g} = 0$ ) и с учетом ( $\hat{g} = 1$ ) влияния силы тяжести при расположении крышки сверху. Видим, что сила тяжести заметно увеличивает частоты собственных колебаний мембраны и незначительно влияет на частоты для пластины.

## Литература

1. Ильгамов М. А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 182 с.
2. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979. 320 с.
3. Перцев А. К., Платонов Э. Г. Динамика оболочек и пластин. Л.: Судостроение, 1987. 316 с.
4. Попов А. Л., Чернышев Г. Н. Механика звукоизлучения пластин и оболочек. М.: Наука, 1994. 208 с.
5. Rayleigh J. On waves propagation along the plane surface of an elastic solid // Proc. London Math. Soc. N 17. 1885. P. 4–11.
6. Lamb H. On the vibrations of an elastic plate in contact with water // Proc. Roy. Soc. A 98. 1921. P. 205–216.
7. Ткачева Л. А. Плоская задача о колебаниях плавающей упругой пластины под действием периодической внешней нагрузки // Прикл. мех. и техн. физ. 2004. Т. 45, № 3. С. 136–145.
8. Lakis A. A., Neagu S. Free surface effects on the dynamics of cylindrical shell partially filled with liquid // J. Sound and Vibration. Vol. 207, N 2. 1997. P. 175–205.
9. Kerboua Y., Lakis A. A., Thomas M., Marcouiller L. Vibration analysis of rectangular plates coupled with fluid // Appl. Math. Model. Vol. 32. 2008. P. 2570–2586.
10. Kaczor A., Sygulsky R. Analysis of free vibrations of a plate and fluid in container // Civil and Envir. Eng. Rep. N 1. 2005. P. 75–83.
11. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. М.; Л.: ГТТИ, 1951. 425 с.

Статья поступила в редакцию 26 марта 2015 г.

## Сведения об авторах

Иванов Денис Николаевич — кандидат физико-математических наук; denisv3@rambler.ru

Наумова Наталья Владимировна — кандидат физико-математических наук, доцент; nat\_n75@mail.ru

Сабанеев Валентин Серафимович — кандидат физико-математических наук, доцент; lescha@westcall.com

Товстик Петр Евгеньевич — доктор физико-математических наук, профессор; peter.tovstik@mail.ru

Товстик Татьяна Петровна — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник; tovstik\_t@mail.ru

## ON THE FREQUENCY SPECTRUM OF FREE VIBRATIONS OF MEMBRANES AND PLATES IN CONTACT WITH FLUID

Denis N. Ivanov<sup>1</sup>, Natalia V. Naumova<sup>1</sup>, Valentin S. Sabaneev<sup>1</sup>, Petr E. Tovstik<sup>1</sup>, Tatiana P. Tovstik<sup>2</sup>

<sup>1</sup> St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; denisv3@rambler.ru, nat\_n75@mail.ru, lescha@westcall.com, peter.tovstik@mail.ru

<sup>2</sup> Institute of Problems of Mechanical Engineering RAS, Bolshoy pr. V. O., 61, St. Petersburg, 199178, Russian Federation; tovstik\_t@mail.ru

A container of rectangular parallelepiped form filled by ideal incompressible fluid is studied. The container is closed by an elastic cover which is modeled by a membrane or by a plate of constant thickness. The rest container sides are undeformable. The frequency spectrum of small free vibrations of the cover is built. The motion of fluid is assumed potential and the attached mass of fluid is taken into account. The main peculiarity of problem is that the fluid volume under cover is not changed. As a result the mode of cover deflection satisfies to a restriction equation which follows from the condition that the fluid volume under cover is constant. Refs 11. Figs 5.

*Keywords:* membrane, plate, incompressible fluid in container, free vibrations with restriction.

## References

1. Il'gamov M. A., *Vibrations of elastic shells, containing fluid and gas* (Nauka, Moscow, 1969) [in Russian].
2. Vol'mir A. S., *Shells in stream of fluid and gas. Problems of hydroelasticity* (Nauka, Moscow, 1979) [in Russian].
3. Pertsev A. K., Platonov E. G., *Dynamics of shells and plates* (Sudostroenie, Leningrad, 1987) [in Russian].
4. Popov A. L., Chernyshev G. N., *Mechanics of plates and shells sound radiation* (Nauka, Moscow, 1994) [in Russian].
5. Rayleigh J., "On waves propagation along the plane surface of an elastic solid", *Proc. London Math. Soc.* (17), 4–11 (1885).
6. Lamb H., "On the vibrations of an elastic plate in contact with water", *Proc. Roy. Soc. A* 98, 205–216 (1921).
7. Tkacheva L. A., "Plane vibration problem of a floating elastic plate under periodic external excitation", *Prikl. Mekh. and Tekhn. Phys.* 45(3), 136–145 (2004) [in Russian].
8. Lakis A. A., Neagu S., "Free surface effects on the dynamics of cylindrical shell partially filled with liquid", *J. Sound and Vibration* 207(2), 175–205 (1997).
9. Kerboua Y., Lakis A. A., Thomas M., Marcouiller L., "Vibration analysis of rectangular plates coupled with fluid", *Appl. Math. Model.* 32, 2570–2586 (2008).
10. Kaczor A., Sygulsky R., "Analysis of free vibrations of a plate and fluid in container", *Civil and Envir. Eng. Rep.* (1), 75–83 (2005).
11. Courant R., Gilbert D., *Methoden der mathematischen Physik* (B. 1, Berlin, 1931) [in German].