

## О СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТАХ КОЛЕБАНИЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН\*

С. М. Бауэр, Е. В. Воронкова

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

В работе обсуждается влияние свойств материала круглой трансверсально-изотропной пластины на частоты ее собственных колебаний. Частоты собственных колебаний однородной пластины найдены с помощью двух неклассических теорий пластин и оболочек с учетом нормальных сил инерции и инерции вращения. Для исследования влияния неоднородных по радиусу свойств пластины проведены расчеты частот колебаний в конечно-элементном пакете Comsol Multiphysics 5.0. Проведенные расчеты показывают, что неоднородность пластины оказывает наибольшее влияние на первую частоту колебаний, в то время как различие тангенциальных и нормальных модулей упругости оказывает большее влияние на высокочастотные колебания пластины. Библиогр. 2 назв. Ил. 1. Табл. 1.

*Ключевые слова:* круглая пластина, трансверсальная изотропия, колебания.

**1. Введение.** В работе рассматривается задача о колебаниях трансверсально-изотропной круглой пластины и исследуется влияние свойств материала пластины на частоты ее собственных колебаний. Классическая теория пластин Кирхгофа—Лява (КЛ) учитывает только свойства пластины в срединной поверхности, поэтому частоты, получаемые для изотропных и трансверсально-изотропных пластин по классической теории, одинаковы. Теория анизотропных оболочек С. А. Амбарцумяна [1] позволяет учесть влияние деформаций сдвига в направлении толщины пластины на ее напряженно-деформированное состояние. Теория анизотропных пластин и оболочек, разработанная В. А. Родионовой, Б. Ф. Титаевым и К. Ф. Черныхом [2], в общем случае позволяет учитывать не только поперечные сдвиги, но и деформируемость нормали к срединной плоскости. В данной статье задача о нахождении частот собственных колебаний решается с помощью теорий [1] и [2], уточняющих теорию КЛ. Для исследования влияния неоднородных по радиусу свойств пластины проводятся расчеты частот колебаний в конечно-элементном пакете Comsol Multiphysics 5.0.

**2. Постановка задачи.** Рассматривается задача о нахождении частот собственных колебаний трансверсально-изотропной круглой пластины радиуса  $R$ , толщины  $h$ . Материал пластины подчиняется закону Гука [2], при этом плоскость пластины является плоскостью изотропии:

$$\sigma_{ii} = E_{ii}e_{ii} + E_{ij}e_{jj} + E_{ik}e_{kk}, \quad i \neq j \neq k, \quad \sigma_{ij} = G_{ij}e_{ij}, \quad i \neq j, \quad (1)$$

где

$$E_{11} = \frac{E_1(E_1 - E_3\nu_{13}^2)}{E_{den}}, \quad E_{12} = \frac{E_1(E_1\nu_{12} + E_3\nu_{13}^2)}{E_{den}}, \quad E_{13} = \frac{E_1E_3\nu_{13}(1 + \nu_{12})}{E_{den}},$$

$$E_{33} = \frac{E_1E_3(1 - \nu_{12}^2)}{E_{den}}, \quad E_{den} = (1 + \nu_{12})(E_1(1 - \nu_{12}) - 2E_3\nu_{13}^2).$$

\*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-01-06311 и с использованием оборудования ресурсного центра Научного парка СПбГУ «Обсерватория экологической безопасности».

Здесь  $E_i$  ( $i = r, \theta, z$ ) — модули упругости в направлении координаты  $i$ ,  $(r, \theta, z)$  — введенные цилиндрические координаты,  $G_{ij}$  — модули сдвига в плоскости  $(i - j)$ ,  $\nu_{ij}$  — коэффициенты Пуассона. Для трансверсально-изотропной пластины  $G_{12} = E_1/2(1 + \nu_{12})$ ,  $G_{13} = G_{23}$ .

Система уравнений колебаний трансверсально-изотропной однородной пластины по уточненной теории С. А. Амбарцумяна [1] записывается в виде

$$D\Delta\Delta w + \rho h(1 - \kappa\Delta)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta F - \delta^2 F = 0, \quad (2)$$

где

$$\kappa = \frac{h^2}{10(1 - \nu_{12}^2)} \left( 2\frac{G_{12}}{G_{13}} - \nu_{13} \right), \quad \delta^2 = \frac{10}{h^2} \frac{G_{13}}{G_{12}},$$

$w$  — нормальный прогиб,  $F$  — функция, связывающая прогиб и перерезывающие усилия,  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\rho$  — плотность материала,  $D = E_1 h^3 / 12(1 - \nu_{12}^2)$  — цилиндрическая жесткость пластины.

Характеристическое уравнение для определения частот собственных колебаний жестко заделанной по контуру пластины имеет вид

$$\begin{aligned} & \mu \frac{I_{n-1}(\mu)}{I_n(\mu)} - \lambda \frac{J_{n-1}(\lambda)}{J_n(\lambda)} + \\ & + \frac{5}{2\delta^2 R^2(1 - \nu_{12})} \left( \lambda \mu \left[ \lambda \frac{I_{n-1}(\mu)}{I_n(\mu)} + \mu \frac{J_{n-1}(\lambda)}{J_n(\lambda)} \right] - n(\lambda^2 + \mu^2) \frac{I_{n-1}(\delta R)}{I_n'(\delta R)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Частоты колебаний этой пластины связаны с корнями  $\lambda_{n,m}$  уравнения (3) соотношениями

$$\omega_{n,m}^A = \frac{\lambda_{n,m}^2}{\sqrt{1 + \kappa\lambda_{n,m}^2}} \sqrt{\frac{D}{\rho h R^4}}, \quad \mu_{n,m} = \frac{\lambda_{n,m}}{\sqrt{1 + \kappa\lambda_{n,m}^2}}.$$

Здесь  $J_n$ ,  $I_n$  — функции Бесселя,  $n$ ,  $m$  — число узловых диаметров и окружностей соответственно.

Уравнение, описывающее колебания пластины по классической теории пластин КЛ, и соответствующее ему характеристическое уравнение могут быть получены из (2) и (3), если положить  $\kappa = 0$  и  $\delta \rightarrow \infty$ .

**3. Колебания по теории Родионовой—Титаева—Черныха.** Теория анизотропных пластин и оболочек, разработанная В. А. Родионовой, Б. Ф. Титаевым и К. Ф. Черныхом (РТЧ) [2], в общем случае позволяет учитывать деформируемость нормали к срединной плоскости. При построении теории полагается, что касательные напряжения распределены по толщине по закону полинома третьей степени, а нормальное напряжение — полинома второй степени от координаты  $z$ . В данной статье рассматривается задача о колебаниях на основе теории, изложенной в [2], с учетом только поперечных сдвигов.

При отсутствии внешних поверхностных сил векторно-матричное дифференциальное уравнение движения с учетом нормальных сил инерции и инерции вращения имеет вид

$$A_{11} \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial r^2} + A_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{r \partial r \partial \theta} + A_{22} \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{r^2 \partial \theta^2} + A_{10} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial r} + A_{02} \frac{\partial \mathbf{V}}{r \partial \theta} + A_{00} \mathbf{V} + A_{tt} \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial t^2} = 0, \quad (4)$$

в котором  $\mathbf{V} = (w^*(r, \theta, t), \gamma_1^*(r, \theta, t), \gamma_2^*(r, \theta, t))$  — искомая вектор-функция. В квадратных матрицах  $A_{ij}$  следующие элементы отличны от нуля:

$$\begin{aligned} A_{11}^{(11)} &= A_{22}^{(11)} = \frac{5}{6}G_{13}h, & A_{11}^{(22)} &= A_{22}^{(55)} = d_{11}, & A_{11}^{(33)} &= A_{22}^{(33)} = d_{66}, \\ A_{12}^{(23)} &= A_{12}^{(32)} = d_{12} + d_{66}, & A_{10}^{(11)} &= \frac{5}{6r}G_{13}h, & A_{10}^{(12)} &= \frac{5}{3}G_{13}, & A_{10}^{(21)} &= -\frac{5}{6}G_{13}h, \\ A_{10}^{(22)} &= \frac{d_{11}}{r}, & A_{10}^{(33)} &= \frac{d_{66}}{r}, & A_{02}^{(13)} &= \frac{5}{3}G_{13}, & A_{02}^{(23)} &= -A_{02}^{(32)} = \frac{d_{12} + d_{66}}{r}, \\ A_{02}^{(31)} &= -\frac{5}{3}G_{13}h, & A_{00}^{(12)} &= \frac{5}{3r}G_{13}, & A_{00}^{(22)} &= \frac{-d_{11}}{r^2} - \frac{5}{3}G_{13}, & A_{00}^{(33)} &= -d_{66}/r^2 - \frac{5}{3}G_{13}, \\ A_{tt}^{(11)} &= -\rho h, & A_{tt}^{(22)} &= -\rho \frac{h^2}{6}, & A_{tt}^{(33)} &= -\rho \frac{h^2}{6}, \\ d_{11} &= \frac{E_1 h^2}{6(1 - \nu_{12}^2)}, & d_{12} &= \nu_{12} d_{11}, & d_{66} &= \frac{1 - \nu_{12}}{2} d_{11}. \end{aligned}$$

После разделения переменных для функций  $w^* = W_n(r) \cos(n\theta) \cos(\omega t)$ ,  $\gamma_1^* = g_{1n}(r) \cos(n\theta) \cos(\omega t)$ ,  $\gamma_2^* = g_{2n}(r) \sin(n\theta) \sin(\omega t)$  система (4) может быть сведена к виду

$$Y' = A(\omega^2)Y, \quad (5)$$

где  $Y = (W_n, g_{1n}, g_{2n}, W_n', g_{1n}', g_{2n}')$ ,  $A(\omega^2)$  — матрица размера  $6 \times 6$ ,  $(\ )' = \frac{d}{dr}(\ )$ . Решение системы (5) представимо виде

$$Y(r) = L \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 r} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_6 r} \end{bmatrix} L^{-1}C. \quad (6)$$

Здесь  $\lambda_i$  — собственные числа, а  $L$  — матрица, составленная из собственных векторов матрицы  $A(\omega^2)$ ,  $C$  — вектор произвольных постоянных. После подстановки (6) в соответствующие граничные условия уравнение для определения частот  $\omega_{n,m}$  выводится из условия существования нетривиального решения системы (5).

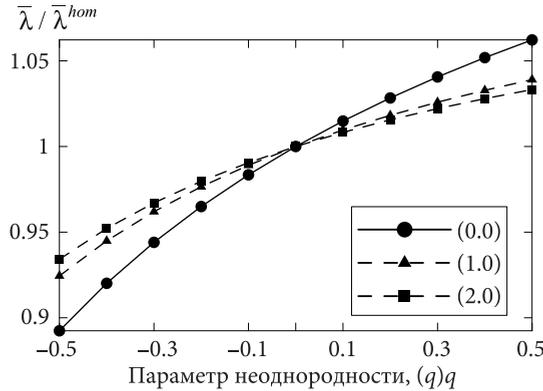
**4. Результаты.** В таблице приведены нормированные параметры частот собственных колебаний однородной пластины  $\bar{\lambda}_{n,m} = \lambda_{n,m}/\lambda_{n,m}^{KL}$ , найденные по двум уточненным теориям оболочек [1, 2], а также методом конечных элементов (МКЭ) в пакете Comsol Multiphysics 5.0. Предполагалось, что  $h/R = 1/10$ , а отношение модулей упругости равно  $E_1/E_3 = G_{12}/G_{13} = 1$  для изотропной пластины и  $E_1/E_3 = G_{12}/G_{13} = 10$  для трансверсально-изотропной пластины. Индексы  $KL$ ,  $A$ ,  $RTC$ ,  $FEM$  соответствуют значениям, найденным по классической теории КЛ, теориям Амбарцумяна, уточненной теории РТЧ и с помощью МКЭ соответственно. Видно, что трансверсальная изотропия оказывает большее влияние на высшие частоты.

Расчеты частот собственных колебаний неоднородной пластины были проведены в пакете Comsol Multiphysics 5.0. При расчетах предполагалось, что модуль упругости в плоскости изотропии пластины изменяется при движении от центра к краю пластины  $E_1 = E_{10}f(r)$ , где  $f(r)$  — достаточно гладкая положительная на отрезке  $[0, R]$  функция. При проведении расчетов параметр  $E_{10}$  выбирался так, чтобы среднее зна-

**Нормированные частоты колебаний**

$\bar{\lambda}_{m,n} = \lambda_{n,m} / \lambda_{n,m}^{KL}$  при  $h/R = 1/10$

$n$	$m$	$\bar{\omega}_{n,m}^A$	$\bar{\omega}_{n,m}^{RTC}$	$\bar{\omega}_{n,m}^{FEM}$	$\bar{\omega}_{n,m}^A$	$\bar{\omega}_{n,m}^{RTC}$	$\bar{\omega}_{n,m}^{FEM}$
		$E_1/E_3 = G_{12}/G_{13} = 1$	$E_1/E_3 = G_{12}/G_{13} = 1$	$E_1/E_3 = G_{12}/G_{13} = 1$	$E_1/E_3 = G_{12}/G_{13} = 10$	$E_1/E_3 = G_{12}/G_{13} = 10$	$E_1/E_3 = G_{12}/G_{13} = 10$
0	0	0.97	0.97	0.98	0.77	0.79	0.8
1	0	0.95	0.96	0.96	0.67	0.68	0.7
2	0	0.92	0.92	0.92	0.6	0.6	0.61
0	1	0.92	0.92	0.92	0.58	0.59	0.6
3	0	0.90	0.90	0.89	0.54	0.55	0.56
1	1	0.89	0.89	0.89	0.51	0.52	0.53



Влияние неоднородности пластины на частоты колебаний

чение модуля упругости пластины  $E_{av}$  оставалось постоянным:

$$E_{av} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R E_1(r) r dr d\theta = \text{const.}$$

На рисунке на примере трех низших частот колебаний показано влияние свойств материала пластины на частоты ее собственных колебаний. Предполагалось, что модуль Юнга в плоскости изотропии изменяется по закону  $E_1 = E_{10}(1 + qr/R)$ , и его среднее значение в 10 раз превосходит модуль упругости пластины в направлении толщины. Частоты  $\lambda_{1,0}$  и  $\lambda_{2,0}$  неоднородной пластины отличаются от соответствующих частот однородной пластины ( $q = 0$ ) не более чем на 7%, а для первой (наименьшей) частоты  $\lambda_{0,0}$  это изменение превышает 10%.

**5. Заключение.** Проведенные расчеты показывают, что различие тангенциальных и нормальных модулей упругости оказывает большее влияние на высокочастотные колебания пластины. Неоднородность пластины больше влияет на низшие частоты.

**Литература**

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М., 1967. 226 с.
2. Родионова В. А., Титаев Б. Ф., Черныш К. Ф. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1996. 280 с.

Статья поступила в редакцию 22 октября 2015 г.

## Сведения об авторах

Бауэр Светлана Михайловна — доктор физико-математических наук, профессор; s.bauer@spbu.ru

Воронкова Ева Боруловна — кандидат физико-математических наук, доцент; e.voronkova@spbu.ru

## ON NATURAL FREQUENCIES OF TRANSVERSALLY ISOTROPIC CIRCULAR PLATES

*Svetlana M. Bauer, Eva B. Voronkova*

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation;  
s.bauer@spbu.ru, e.voronkova@spbu.ru

Impact of material properties of transversely isotropic circular plates on its natural frequencies is discussed in the present paper. Two refined theories of plates are used to analyze the free vibration behavior of homogeneous plates. Both theories take into account normal and rotary inertias. Fundamental frequencies for plates with radial inhomogeneity are obtained with the help of finite element package Comsol Multiphysics 5.0. It is shown that the inhomogeneity of the plate have a profound impact on the first (lowest) frequency of the plate while the plate orthotropic influences more on the second and higher vibration modes. Refs 2. Figs 1. Tables 1.

*Keywords:* circular plate, transversely isotropic plate, vibrations.

## References

1. Ambartsumyan S. A., *Theory of Anisotropic Plates* (Technomic, Stamford, 1970).
2. Rodionova V. A., Titaev B. F., Chernykh K. F., *Applied Theory of Anisotropic Plates and Shells* (St. Peterb. Univ., St. Petersburg, 1996) [in Russian].