

## НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ О ПЛОСКОСТИ С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

Ю. М. Давы

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Найдены новые решения краевых задач теории упругости для плоскости с произвольным числом разрезов на вещественной оси. Исследованы два основных случая: 1) кромки разрезов нагружены сосредоточенными силами, напряжения на бесконечности отсутствуют; 2) берега разрезов свободны, на бесконечности плоскость растянута постоянными внешними усилиями. Библиогр. 6 назв. Ил. 9.

*Ключевые слова:* плоская задача теории упругости, комплексная переменная, формулы Колосова, прямолинейные разрезы.

**1. Введение.** Теоретический анализ напряженного состояния упругой плоскости с разрезами до сих пор является предметом многочисленных исследований. В различных публикациях рассматриваются как одиночные разрезы, так и два-три одинаковых коллинеарных разреза или же периодические разрезы одной и той же длины [1]. При этом, как правило, кромки разрезов считаются свободными либо загруженными равномерно распределенной нормальной нагрузкой. Задачи о произвольном числе разрезов различной длины при иных внешних усилиях остаются практически не изученными.

В настоящей работе приведены точные аналитические решения краевых задач для плоскости с произвольной конечной или периодической системой разрезов на вещественной оси. В основу анализа положены соотношения плоской задачи теории упругости в терминах функций комплексного переменного  $z = x + iy$ . Математические модели всех задач сведены к проблемам Гильберта–Привалова для двух функций Г. В. Колосова.

**2. Общие формулы плоской задачи теории упругости для напряжений.** Рассмотрим сечение  $S$  упругого тела, находящегося в условиях обобщенного плоского напряженного состояния или плоской деформации. Согласно [2], компоненты напряжения  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  в области  $S$  определяются формулами

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2 \left[ \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} \right], \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2 \left[ -2iy\Phi'(z) + \Psi_2(z) \right],\end{aligned}\tag{2.1}$$

где первое равенство — интеграл уравнения неразрывности деформаций, а второе — интеграл комплексного уравнения равновесия [3];  $\Psi_2(z)$  — регулярная функция, связанная со своим классическим аналогом  $\Psi(z)$  соотношением

$$\Psi_2(z) = \Psi(z) + z\Phi'(z).\tag{2.2}$$

Если область  $S$  представляет собой  $n$ -связную плоскость, то, в общем случае, при

$|z| \gg 1$  имеем [4, с. 124]

$$\Phi(z) = \varphi'(z) = \frac{X + iY}{2\pi(1+k)} \frac{1}{z} + \Gamma + \Phi_0(z), \quad \Psi(z) = \psi'(z) = \frac{k(X - iY)}{2\pi(1+k)} \frac{1}{z} + A + \Psi_0(z). \quad (2.3)$$

Здесь  $\Phi_0(z) = O(1/z^2)$ ,  $\Psi_0(z) = O(1/z^2)$  — регулярные на бесконечности функции;  $X$  и  $Y$  — компоненты главного вектора внешних усилий, приложенных ко всей совокупности контуров  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), составляющих границу плоскости; параметр  $k = (3 - \mu)/(1 + \mu)$  при обобщенном плоском напряженном состоянии и  $k = 3 - 4\nu$  в случае плоской деформации;  $\mu$  — коэффициент Пуассона;

$$\Gamma = \frac{\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty}{4} = \text{const}, \quad A = \frac{\sigma_{yy}^\infty - \sigma_{xx}^\infty}{2} + i\sigma_{xy}^\infty = \text{const}. \quad (2.4)$$

Пусть в равенствах (2.3) величины  $X = Y = 0$ . Тогда  $\Phi(z) = \Gamma + \Phi_0(z)$ ,  $\Psi(z) = A + \Psi_0(z)$ , откуда следует

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y\Phi'(z) = 0. \quad (2.5)$$

На основании (2.5) из второго уравнения (2.1) получаем

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \Psi_2(z) = A.$$

Отсюда при  $\sigma_{xx}^\infty \neq \sigma_{yy}^\infty$ ,  $\sigma_{xy}^\infty \neq 0$  в соответствии с (2.4) имеем  $\Psi_2(z) \equiv \text{Re}A + i\text{Im}A$ , где  $\text{Im}A = \sigma_{xy}^\infty$ ,  $\text{Re}A = (\sigma_{yy}^\infty - \sigma_{xx}^\infty)/2$ , и формулы (2.1) преобразуются в соотношения Вестергарда [4, 5]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\text{Re}\Phi(z) - 2y\text{Im}\Phi'(z) - \text{Re}A, \\ \sigma_{yy} &= 2\text{Re}\Phi(z) + 2y\text{Im}\Phi'(z) + \text{Re}A, \\ \sigma_{xy} &= -2y\text{Re}\Phi'(z) + \text{Im}A. \end{aligned} \quad (2.6)$$

### 3. Влияние симметрии (асимметрии) внешних нагрузок на вид функций $\Phi(z)$ , $\Psi(z)$ , $\Psi_2(z)$

**Симметрия.** Пусть многосвязная область  $S$  представляет собой конечную или бесконечную часть плоскости. Предположим, что вещественная ось  $x$  является осью симметрии как самой области  $S$ , так и поля внешних усилий.

Учитывая (2.2), представим уравнения (2.1) в таком обобщенном виде [6]:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + iE^* \omega = 4\Phi(z), \quad \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)], \quad (3.1)$$

где  $E^* = E/(1 - \mu^2)$  для плоской деформации и  $E^* = E$  в случае обобщенного плоского напряженного состояния;  $\omega$  — угол поворота;  $E$  — модуль Юнга.

Исходя из условий симметрии, находим

$$\sigma_{xx}(z) = \sigma_{xx}(\bar{z}), \quad \sigma_{yy}(z) = \sigma_{yy}(\bar{z}), \quad \sigma_{xy}(z) = -\sigma_{xy}(\bar{z}), \quad \omega(z) = -\omega(\bar{z}). \quad (3.2)$$

Принимая во внимание соотношения (3.2), на основании (3.1) устанавливаем

$$\begin{aligned} \text{Re}\Phi(z) &= \text{Re}\Phi(\bar{z}), \quad \text{Im}\Phi(z) = -\text{Im}\Phi(\bar{z}), \\ \text{Re}[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] &= \text{Re}[z\Phi'(\bar{z}) + \Psi(\bar{z})], \\ \text{Im}[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] &= -\text{Im}[z\Phi'(\bar{z}) + \Psi(\bar{z})]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В результате умножения на  $i$  второго и четвертого равенств (3.3) и последующего их сложения соответственно с первым и третьим, получим

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \overline{\Phi(\bar{z})} = \overline{\Phi(z)}, \\ \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) &= \overline{z\Phi'(\bar{z}) + \Psi(\bar{z})} = \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z).\end{aligned}$$

Отсюда, имея в виду (2.2), заключаем

$$\overline{\Phi(z)} = \Phi(\bar{z}), \quad \overline{\Psi(z)} = \Psi(\bar{z}), \quad \overline{\Psi_2(z)} = \Psi_2(\bar{z}). \quad (3.4)$$

Если область  $S$  и внешние нагрузки симметричны относительно осей  $x$  и  $y$ , то, кроме равенств (3.3), функции  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  должны удовлетворять зависимостям

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \Phi(z) &= \operatorname{Re} \Phi(-\bar{z}), \quad \operatorname{Im} \Phi(z) = -\operatorname{Im} \Phi(-\bar{z}), \\ \operatorname{Re}[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] &= \operatorname{Re}[-z\Phi'(-\bar{z}) + \Psi(-\bar{z})], \\ \operatorname{Im}[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] &= -\operatorname{Im}[-z\Phi'(-\bar{z}) + \Psi(-\bar{z})],\end{aligned}$$

которые вкупе с (3.4) сводятся к соотношениям

$$\overline{\Phi(z)} = \Phi(\bar{z}) = \Phi(-\bar{z}), \quad \overline{\Psi(z)} = \Psi(\bar{z}) = \Psi(-\bar{z}), \quad \overline{\Psi_2(z)} = \Psi_2(\bar{z}) = \Psi_2(-\bar{z}).$$

**Асимметрия.** Пусть многосвязная область  $S$  симметрична относительно вещественной оси, тогда как внешние усилия, наоборот, антисимметричны. В этом случае

$$\sigma_{xx}(z) = -\sigma_{xx}(\bar{z}), \quad \sigma_{yy}(z) = -\sigma_{yy}(\bar{z}), \quad \sigma_{xy}(z) = \sigma_{xy}(\bar{z}), \quad \omega(z) = \omega(\bar{z}),$$

и после выкладок, аналогичных вышеприведенным, будем иметь

$$\overline{\Phi(z)} = -\Phi(\bar{z}), \quad \overline{\Psi(z)} = -\Psi(\bar{z}), \quad \overline{\Psi_2(z)} = -\Psi_2(\bar{z}). \quad (3.5)$$

**4. Плоскость с конечным числом нагруженных разрезов.** Рассмотрим сначала плоскость, содержащую один разрез на вещественной оси и свободную от нагрузки на бесконечности. Пусть в некоторой точке верхнего берега разреза приложена сосредоточенная сила  $2R = 2P + i2T$ , направленная под углом к оси  $x$ . Представив вектор  $2R$  как сумму четырех пар векторов  $P$  и  $T$ , видим, что решение задачи об упругой плоскости с произвольно нагруженным разрезом является суммой решений четырех задач, схемы к которым изображены на рис. 1.

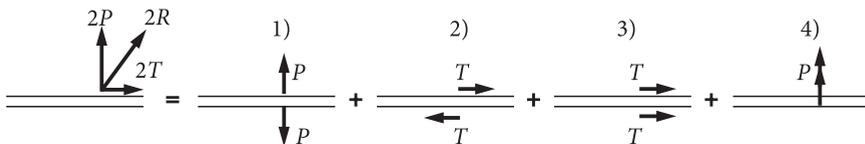


Рис. 1. Исходная задача и четыре частные задачи о нагруженном разрезе

Если плоскость содержит  $N$  разрезов, на краях которых действуют внешние сосредоточенные силы ( $\sigma_{xx}^\infty = \sigma_{yy}^\infty = \sigma_{xy}^\infty = 0$ ), то решение подобной задачи сводится к отысканию решений  $4N$  частных задач, представленных на рис. 1. Заметим, что в задачах типов 1 и 3 функции  $\Phi(z)$  и  $\Psi_2(z)$  подчиняются соотношениям (3.4), в задачах типов 2 и 4 — зависимостям (3.5).

**Задача 1.** Согласно формулам (2.1) и (3.4)

$$\sigma_{yy} + i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - 2iy\Phi'(z) + \Psi_2(z). \quad (4.1)$$

Краевые условия на разрезах  $a_k b_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) оси  $x$  будут

$$\sigma_{yy}^{\pm}(x) + i\sigma_{xy}^{\pm}(x) = \sum_{k=1}^N (-P_k)\delta(x - \lambda_k).$$

Здесь и ниже индексами  $+$  и  $-$  обозначены соответственно верхние и нижние берега разрезов;  $P_k$  — величина силы, приложенной в точке  $\lambda_k$  на разрезе  $a_k b_k$ ;  $\delta(x - \lambda_k)$  — дельта-функция Дирака. Отсюда на основании (4.1) получаем

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) + \Psi_2^+(x) = -\sum_{k=1}^N P_k \delta(x - \lambda_k), \quad \Phi^+(x) + \Phi^-(x) + \Psi_2^-(x) = -\sum_{k=1}^N P_k \delta(x - \lambda_k).$$

Вычитая и складывая эти равенства, приходим к задачам Гильберта—Привалова для функций  $\Psi_2(z)$  и  $\Phi(z)$ :

$$\Psi_2^+(x) - \Psi_2^-(x) = 0, \quad \Phi^+(x) + \Phi^-(x) + \frac{1}{2}[\Psi_2^+(x) + \Psi_2^-(x)] = -\sum_{k=1}^N P_k \delta(x - \lambda_k).$$

Следуя [3, с. 385–401], запишем их решение в виде

$$\Psi_2(z) = 0, \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{\prod_{k=1}^N (z - a_k)(z - b_k)}} \left( \sum_{k=1}^N \frac{-P_k}{\lambda_k - z} \sqrt{\prod_{k=1}^N (\lambda_k - a_k)(\lambda_k - b_k)} \right).$$

В частности, если  $N = 1$ , то

$$\Psi_2(z) = 0, \quad \Phi(z) = \frac{P_1 \sqrt{a^2 - \lambda_1^2}}{2\pi(z - \lambda_1) \sqrt{z^2 - a^2}}, \quad (4.2)$$

где  $2a$  — длина разреза  $a_1 b_1$ , причем  $a_1 = -a$ ,  $b_1 = a$ .

**Задача 2.** Из соотношений (2.1) и (3.5) находим

$$\sigma_{yy} + i\sigma_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) - 2iy\Phi'(z) + \Psi_2(z). \quad (4.3)$$

Внося правую часть этого равенства в краевые условия на разрезах  $a_k b_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ )

$$\sigma_{yy}^{\pm}(x) + i\sigma_{xy}^{\pm}(x) = i \sum_{k=1}^N T_k \delta(x - \lambda_k),$$

устанавливаем

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) + \Psi_2^+(x) = i \sum_{k=1}^N T_k \delta(x - \lambda_k), \quad \Phi^-(x) - \Phi^+(x) + \Psi_2^-(x) = i \sum_{k=1}^N T_k \delta(x - \lambda_k),$$

откуда

$$\Psi_2^+(x) + \Psi_2^-(x) = 2i \sum_{k=1}^N T_k \delta(x - \lambda_k), \quad \Phi^+(x) - \Phi^-(x) = -\frac{1}{2} [\Psi_2^+(x) - \Psi_2^-(x)].$$

Данным граничным условиям удовлетворяют функции

$$\Psi_2(z) = -2\Phi(z) = \frac{1}{\pi \sqrt{\prod_{k=1}^N (z - a_k)(z - b_k)}} \left( \sum_{k=1}^N \frac{T_k}{\lambda_k - z} \sqrt{\prod_{k=1}^N (\lambda_k - a_k)(\lambda_k - b_k)} \right).$$

В случае одного разреза

$$\Psi_2(z) = -2\Phi(z) = \frac{iT_1 \sqrt{a^2 - \lambda_1^2}}{\pi(\lambda_1 - z) \sqrt{z^2 - a^2}}.$$

Здесь, как и выше,  $2a$  — длина разреза  $a_1 b_1$ , где  $a_1 = -a$ ,  $b_1 = a$ .

**Задача 3.** В результате подстановки выражения (4.1) в граничные условия на верхних и нижних берегах разрезов  $a_k b_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ )

$$\sigma_{yy}^+(x) + i\sigma_{xy}^+(x) = i \sum_{k=1}^N T_k \delta(x - \lambda_k), \quad \sigma_{yy}^-(x) + i\sigma_{xy}^-(x) = -i \sum_{k=1}^N T_k \delta(x - \lambda_k),$$

приходим к равенствам Гильберта—Привалова:

$$\Psi_2^+(x) - \Psi_2^-(x) = 2i \sum_{k=1}^N T_k \delta(x - \lambda_k), \quad \Phi^+(x) + \Phi^-(x) + [\Psi_2^+(x) + \Psi_2^-(x)] / 2 = 0,$$

которым удовлетворяют функции

$$\Psi_2(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{T_k}{\lambda_k - z}, \quad \Phi(z) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \frac{T_k}{\lambda_k - z}.$$

Для одиночного разреза

$$\Psi_2(z) = \frac{T_1}{\pi(\lambda_1 - z)}, \quad \Phi(z) = -\frac{T_1}{2\pi(\lambda_1 - z)}.$$

**Задача 4.** Краевые условия на совокупности  $N$  разрезов

$$\sigma_{yy}^+(x) + i\sigma_{xy}^+(x) = - \sum_{k=1}^N P_k \delta(x - \lambda_k), \quad \sigma_{yy}^-(x) + i\sigma_{xy}^-(x) = + \sum_{k=1}^N P_k \delta(x - \lambda_k)$$

с учетом зависимости (3.5) принимают вид

$$\Psi_2^+(x) + \Psi_2^-(x) = 0, \quad \Phi^+(x) - \Phi^-(x) + \frac{1}{2} [\Psi_2^+(x) - \Psi_2^-(x)] = - \sum_{k=1}^N P_k \delta(x - \lambda_k).$$

Отсюда следует, что

$$\Psi_2(z) = 0, \quad \Phi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \frac{P_k}{\lambda_k - z}.$$

Если на вещественной оси находится единственный разрез, то

$$\Psi_2(z) = 0, \quad \Phi(z) = -\frac{P_1}{2\pi i(\lambda_1 - z)}.$$

## 5. Периодические задачи

**Задача 1.** Рассмотрим плоскость с бесконечным числом равноудаленных друг от друга разрезов  $a_k b_k$  на оси абсцисс. Обозначим через  $2a$  длину этих разрезов и через  $l$  расстояние между их центрами. Пусть на противоположных берегах разрезов в точках  $x_k = \lambda \pm kl$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) приложены сосредоточенные силы  $P$ , коллинеарные оси  $y$  (рис. 2). Напряжения на бесконечности считаем отсутствующими ( $\sigma_{xx}^\infty = \sigma_{yy}^\infty = \sigma_{xy}^\infty = 0$ ).

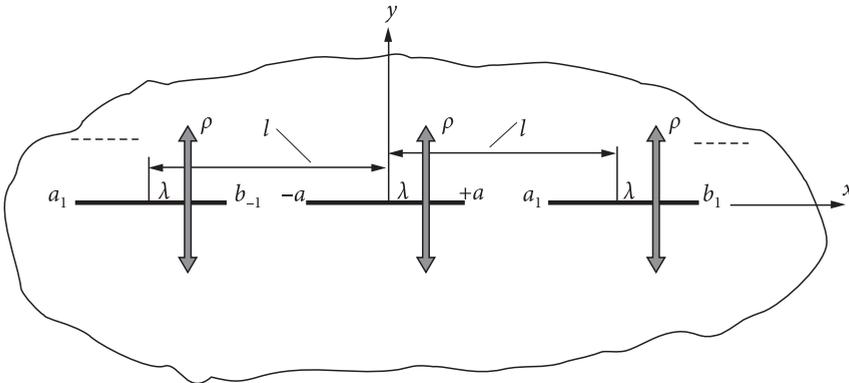


Рис. 2. Плоскость с разрезами (симметричная нагрузка)

На основании (4.1) получаем

$$\sigma_{xy} = -y[\Phi'(z) + \Phi'(\bar{z})] - \frac{i}{2}[\Psi_2(z) - \Psi_2(\bar{z})], \quad (5.1)$$

$$\sigma_{yy} = \Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - iy[\Phi'(z) - \Phi'(\bar{z})] + \frac{1}{2}[\Psi_2(z) + \Psi_2(\bar{z})]. \quad (5.2)$$

В силу очевидной периодичности задачи, функции  $\Phi(z)$  и  $\Psi_2(z)$  можно установить из краевых условий на разрезе  $a_0 b_0$  ( $y = 0, -a \leq x \leq +a$ ):

$$\sigma_{xy}^\pm(x) = 0, \quad \sigma_{yy}^\pm(x) = -P\delta_\infty(x), \quad (5.3)$$

где  $\delta_\infty(x)$  — множество функций Дирака, определяемое рядом

$$\delta_\infty(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda + kl - x). \quad (5.4)$$

Внося в (5.3) выражения (5.1), (5.2) и (5.4), находим

$$\Psi_2^+(x) - \Psi_2^-(x) = 0, \quad (5.5)$$

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) + \frac{1}{2}[\Psi_2^+(x) + \Psi_2^-(x)] = -P \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda + kl - x). \quad (5.6)$$

Сообразуясь с оговоренными ранее условиями на бесконечности, из равенства (5.5) заключаем, что

$$\Psi_2(z) \equiv 0. \quad (5.7)$$

Учитывая (5.7), перепишем (5.6) в виде граничного условия периодической задачи Гильберта—Привалова для функции  $\Phi(z)$ :

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = -P \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda + kl - x). \quad (5.8)$$

Ее решение имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{-P}{2\pi i X_\infty(z)} \int_{L^\infty} \frac{X_\infty^+(x) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda + kl - x)}{x - z} dx, \quad (5.9)$$

где

$$\begin{aligned} X_\infty(z) &= \sqrt{(z-a)(z+a)(z-a_1)(z-b_1)(z-a_{-1})(z-b_{-1}) \dots} = \\ &= \sqrt{(z+a) \prod_{k=1}^{\infty} [(z+a)^2 - k^2 l^2] (z-a) \prod_{k=1}^{\infty} [(z-a)^2 - k^2 l^2]}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Символ  $L^\infty$  обозначает интегрирование по всей совокупности прямолинейных разрезов.

Подставив выражения (5.10) в формулу (5.9), после соответствующих выкладок и преобразований устанавливаем

$$\Phi(z) = \frac{P}{2l} \frac{\sqrt{\sin^2 \frac{\pi a}{l} - \sin^2 \frac{\pi \lambda}{l}}}{tg \frac{\pi(z-\lambda)}{l} \sqrt{\sin^2 \frac{\pi z}{l} - \sin^2 \frac{\pi a}{l}}}. \quad (5.11)$$

**Задача 2.** Пусть на противоположных берегах разрезов  $a_k b_k$  в точках  $x_k = \eta \pm kl$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) приложены сосредоточенные касательные нагрузки  $T$  (рис. 3). Напряжения на бесконечности по-прежнему считаем отсутствующими ( $\sigma_{xx}^\infty = \sigma_{yy}^\infty = \sigma_{xy}^\infty = 0$ ).

Из уравнений (2.1) и (3.5) получаем

$$\sigma_{yy} + i\sigma_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) - 2iy\Phi'(z) + \Psi_2(z). \quad (5.12)$$

Отсюда заключаем, что краевые условия данной задачи

$$\sigma_{yy}^\pm(x) + i\sigma_{xy}^\pm(x) = iT \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\eta + kl - x)$$

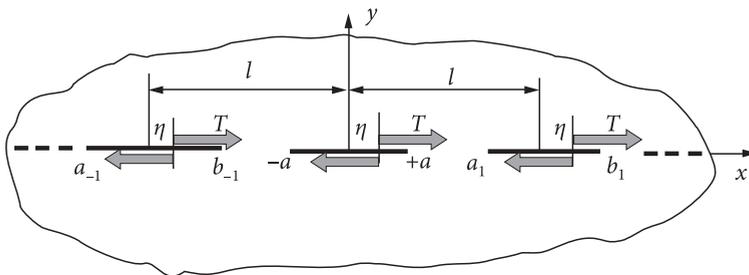


Рис. 3. Плоскость с разрезами (асимметричная нагрузка)

представимы в такой эквивалентной форме:

$$\begin{aligned}\Phi^+(x) - \Phi^-(x) + \Psi_2^+(x) &= iT \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\eta + kl - x), \\ \Phi^-(x) - \Phi^+(x) + \Psi_2^-(x) &= iT \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\eta + kl - x).\end{aligned}\quad (5.13)$$

Складывая равенства (5.13), имеем

$$\Psi_2^+(x) + \Psi_2^-(x) = 2iT \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\eta + kl - x). \quad (5.14)$$

Как видим, с математической точки зрения задачи (5.8) и (5.14) идентичны. Поэтому, заменив в формуле (5.11) параметры  $P$  и  $\lambda$  соответственно на  $-2iT$  и  $\eta$ , находим

$$\Psi_2(z) = -\frac{iT}{l} \frac{\sqrt{\sin^2 \frac{\pi a}{l} - \sin^2 \frac{\pi \eta}{l}}}{\operatorname{tg} \frac{\pi(z-\eta)}{l} \sqrt{\sin^2 \frac{\pi z}{l} - \sin^2 \frac{\pi a}{l}}}. \quad (5.15)$$

Вычитая второе уравнение (5.13) из первого, приходим к соотношению

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = -\frac{1}{2}[\Psi_2^+(x) - \Psi_2^-(x)].$$

Отсюда, с учетом предыдущей зависимости, можем написать

$$\Phi(z) = \frac{iT}{2l} \frac{\sqrt{\sin^2 \frac{\pi a}{l} - \sin^2 \frac{\pi \eta}{l}}}{\operatorname{tg} \frac{\pi(z-\eta)}{l} \sqrt{\sin^2 \frac{\pi z}{l} - \sin^2 \frac{\pi a}{l}}}$$

или

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2}\Psi_2(z). \quad (5.16)$$

Положив в (5.15) параметры  $\eta = 0$  и  $l \gg (a, \eta)$ , получим решение задачи о плоскости с одним центральным разрезом  $a_0 b_0$  ( $y = 0, -a \leq x \leq +a$ ) в виде

$$\Psi_2(z) = -2\Phi(z) = \frac{iTa}{\pi z \sqrt{z^2 - a^2}}.$$

Если в этой формуле  $a \rightarrow \infty$ , то с точностью до малых первого порядка

$$\Psi_2(z) = -2\Phi(z) = \frac{T}{\pi z}.$$

Выражения (5.17) являются решением первой основной краевой задачи для нижней полуплоскости  $y \leq 0$ , нагруженной в начале координат сосредоточенной касательной нагрузкой. Отметим, что в терминах функций  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  решение данной задачи выглядит следующим образом:

$$\Phi(z) = -\frac{T}{2\pi z}, \quad \Psi(z) = \frac{T}{\pi z} - z\Phi'(z) = \frac{T}{2\pi z}.$$

**Замечание.** Периодические задачи 3 и 4 (рис. 1) не имеют решений, ибо в них главный вектор внешних нагрузок, приложенных к бесконечной совокупности разрезов, не является ограниченным.

**6. Растяжение упругой плоскости с конечным числом разрезов.** Рассмотрим плоскость с конечным числом разрезов  $a_k b_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) на оси  $x$ . Предположим, что кромки всех разрезов свободны от внешних усилий, а сама плоскость растянута на бесконечности напряжениями  $\sigma_{yy}^\infty = p = \text{const}$ ,  $\sigma_{xx}^\infty = \sigma_{xy}^\infty = 0$  (рис. 4).

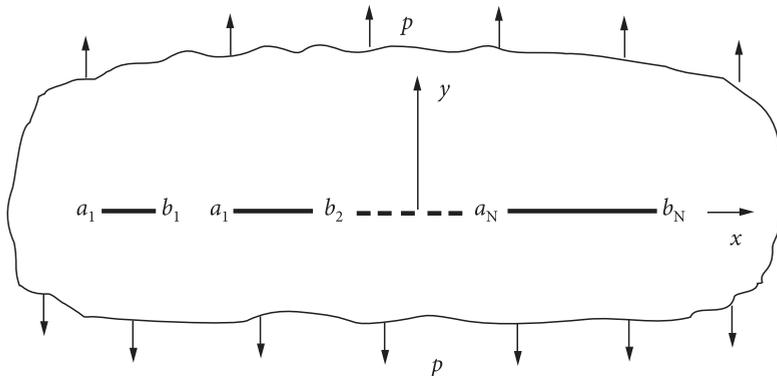


Рис. 4. Плоскость с разрезами, растянутая на бесконечности

Согласно формулам (2.1) и (3.4), представим граничные условия на разрезах

$$\sigma_{yy}^\pm(x) + i\sigma_{xy}^\pm(x) = 0, \quad x \in a_k b_k, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

в таком эквивалентном виде:

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) + \Psi_2^+(x) = 0,$$

$$\Phi^-(x) + \Phi^+(x) + \Psi_2^-(x) = 0.$$

Вычитая и складывая эти равенства, получим

$$\Psi_2^+(x) - \Psi_2^-(x) = 0, \tag{6.1}$$

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) + \frac{1}{2} [\Psi_2^+(x) + \Psi_2^-(x)] = 0. \tag{6.2}$$

Принимая во внимание соотношения (2.4), (2.6) и оговоренные выше условия на бесконечности, приходим к выводу, что решение уравнения (6.1) будет

$$\Psi_2(z) = \frac{p}{2} = \text{const.} \quad (6.3)$$

Учитывая полученный результат, перепишем (6.2) в форме граничного условия задачи Гильберта—Привалова для функции  $\Phi(z)$ , т. е.

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = -\frac{p}{2}.$$

Решение, удовлетворяющее данному условию на совокупности всех разрезов, таково:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{\prod_{k=1}^N (z - a_k)(z - b_k)}} \left(-\frac{p}{2}\right) \int_{L_N} \frac{\sqrt{\prod_{k=1}^N (x - a_k)(x - b_k)}}{z - x} dx,$$

где символ  $L_N$  обозначает интегрирование по всей совокупности  $N$  разрезов.

Вычислив интеграл в правой части этого равенства, устанавливаем

$$\Phi(z) = -\frac{p}{4} + \frac{pz^N}{2\sqrt{\prod_{k=1}^N (z - a_k)(z - b_k)}}. \quad (6.4)$$

Если, например, в формуле (6.4) параметр  $N = 3$ , то

$$\Phi(z) = -\frac{p}{4} + \frac{pz^3}{2\sqrt{\prod_{k=1}^3 (z - a_k)(z - b_k)}}. \quad (6.5)$$

Обозначив длину разреза  $a_2b_2$  через  $2a$ , поместим начало координат в его середине. Пусть краевые разрезы  $a_1b_1$  и  $a_3b_3$  имеют одинаковую длину  $2na$  ( $n$  — некоторое целое или рациональное положительное число) и равноудалены от центрального разреза. Параметры  $l$  и  $\Delta$  — соответственно расстояния между центрами и ближайшими вершинами смежных разрезов (рис. 5).

В принятых обозначениях выражение (6.5) запишется следующим образом:

$$\Phi(z) = -\frac{p}{4} + \frac{pz^3}{2\sqrt{(z^2 - a^2) [z^2 - (l - na)^2] [z^2 - (l + na)^2]}}. \quad (6.6)$$

Полагая  $z = x$ , внесем соотношения (2.4), (6.3) и (6.6) в формулы (2.6), где  $A = p/2$ . В результате находим

$$\sigma_{yy}^0(x) = \frac{\sigma_{yy}(x)}{p} = \frac{1}{\sqrt{[1 - a^2/x^2] [1 - (l - na)^2/x^2] [1 - (l + na)^2/x^2]}},$$

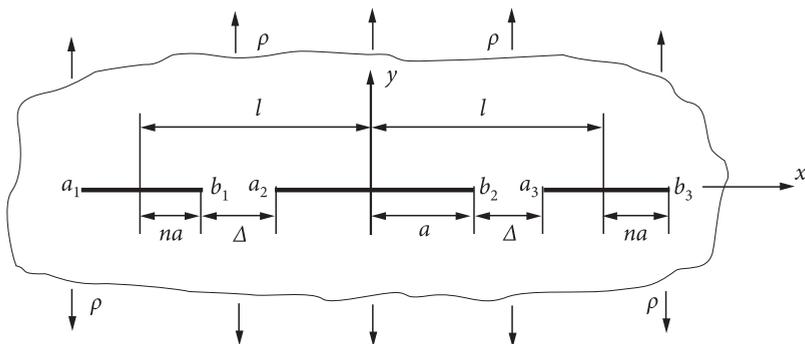


Рис. 5. Плоскость с тремя разрезами на оси абсцисс

$$\sigma_{xx}^0(x) = \frac{\sigma_{xx}(x)}{p} = \frac{1}{\sqrt{[1 - a^2/x^2][1 - (l - na)^2/x^2][1 - (l + na)^2/x^2]}} - 1, \quad \sigma_{xy}(x) = 0.$$

Рассмотрим три системы разрезов:

- 1)  $l = 2.5a$ ,  $n = 0.5$ ,  $\Delta = a$ ; 2)  $l = 3a$ ,  $n = 1$ ,  $\Delta = a$ ; 3)  $l = 4a$ ,  $n = 2$ ,  $\Delta = a$ . (6.7)

Распределение напряжений  $\sigma_{yy}^0(x)$  и  $\sigma_{xx}^0(x)$  на отрезке  $\Delta = a$  между разрезами  $a_2b_2$  и  $a_3b_3$  проиллюстрировано графиками на рис. 6 и 7. Кривые 1 соответствуют  $|a_1b_1| = |a_3b_3| = 0.5|a_2b_2|$ ; кривые 2 —  $|a_1b_1| = |a_3b_3| = |a_2b_2|$ ; кривые 3 —  $|a_1b_1| = |a_3b_3| = 2|a_2b_2|$ .

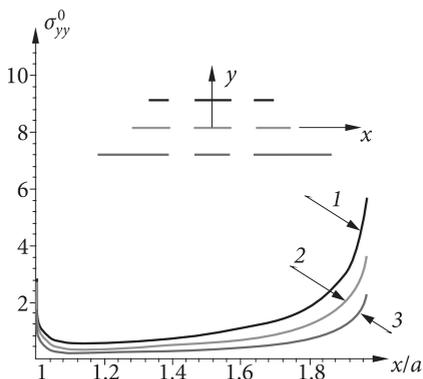


Рис. 6. Распределение напряжений  $\sigma_{yy}^0$  между разрезами

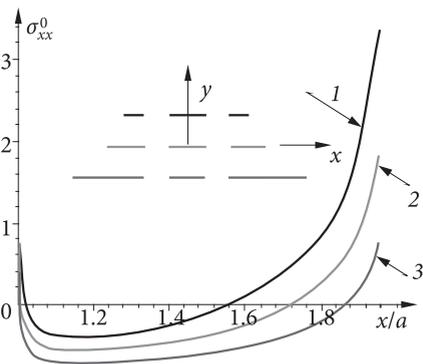


Рис. 7. Распределение напряжений  $\sigma_{xx}^0$  между разрезами

Аналогичным образом на оси  $y$  будем иметь

$$\sigma_{yy}^0(y) = \frac{\sigma_{yy}(y)}{p} = \frac{1}{\sqrt{[1 + a^2/y^2][1 + (l - na)^2/y^2][1 + (l + na)^2/y^2]}}$$

$$\sigma_{xx}^0(y) = \frac{\sigma_{xx}(y)}{p} = \frac{1}{\sqrt{[1 + a^2/y^2][1 + (l - na)^2/y^2][1 + (l + na)^2/y^2]}} - 1, \quad \sigma_{xy}(y) = 0.$$

На рис. 8 и 9 приведены графики напряжений  $\sigma_{yy}^0(y)$  и  $\sigma_{xx}^0(y)$ . Кривые 1 соответствуют  $|a_1b_1| = |a_3b_3| = 0.5|a_2b_2|$ ; кривые 2 —  $|a_1b_1| = |a_3b_3| = |a_2b_2|$ ; кривые 3 —  $|a_1b_1| = |a_3b_3| = 2|a_2b_2|$ ; кривые 4 —  $|a_1b_1| = |a_3b_3| = 0, |a_2b_2| = 2a$ .

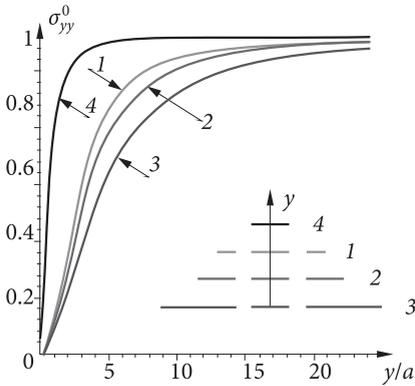


Рис. 8. Величины напряжений  $\sigma_{yy}^0(y)$  на оси  $y$

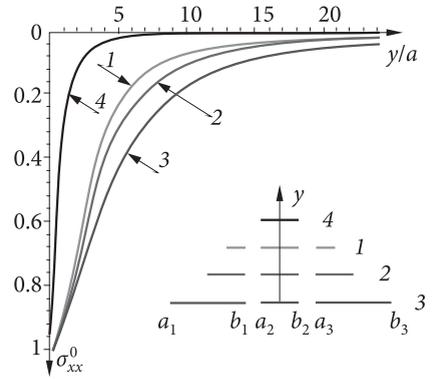


Рис. 9. Величины напряжений  $\sigma_{xx}^0(y)$  на оси  $y$

Обратимся теперь к случаю, когда плоскость с единственным разрезом на оси абсцисс ( $-a \leq x \leq a, y = 0$ ), растянута на бесконечности напряжениями  $\sigma_{yy} = p = \text{const}$ . Согласно (6.4), при  $N = 1$  имеем

$$\Phi(z) = -\frac{p}{4} + \frac{pz}{2\sqrt{z^2 - a^2}}.$$

Внося это выражение в формулы (2.6), получим

$$\sigma_{xx}(x) = \frac{px}{\sqrt{x^2 - a^2}} - 1, \quad \sigma_{yy}(x) = \frac{px}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Если приближаться к вершине разреза по оси  $x$ , считая  $x = a + \xi$ , то при  $0 < \xi \ll a$  предыдущие формулы преобразуются к виду

$$\sigma_{xx}(\xi) \approx \sigma_{yy}(\xi) \approx p\sqrt{\frac{a}{2\xi}}. \quad (6.8)$$

Переходим к оценке напряжений (на оси  $x$ ) около вершин  $b_2, a_3, b_3$  трех разрезов (см. рис. 5), определяемых равенствами (6.7). Выполнив аналогичные подстановки и выкладки, находим

$$\begin{aligned} 1) \quad |a_1b_1| = |a_3b_3| = 0.5|a_2b_2| = a, \quad & \sigma_{xx}^{b_2}(\xi) \approx \sigma_{yy}^{b_2}(\xi) \approx 0.20p\sqrt{\frac{a}{2\xi}}, \\ & \sigma_{xx}^{a_3}(\xi) \approx \sigma_{yy}^{a_3}(\xi) \approx 1.46p\sqrt{\frac{a}{2\xi}}, \\ & \sigma_{xx}^{b_3}(\xi) \approx \sigma_{yy}^{b_3}(\xi) \approx 2.46p\sqrt{\frac{a}{2\xi}}, \\ 2) \quad |a_1b_1| = |a_3b_3| = |a_2b_2| = 2a, \quad & \sigma_{xx}^{b_2}(\xi) \approx \sigma_{yy}^{b_2}(\xi) \approx 0.15p\sqrt{\frac{a}{2\xi}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{xx}^{a_3}(\xi) \approx \sigma_{yy}^{a_3}(\xi) \approx 0.94p\sqrt{\frac{a}{2\xi}}, \\
& \sigma_{xx}^{b_3}(\xi) \approx \sigma_{yy}^{b_3}(\xi) \approx 2.38p\sqrt{\frac{a}{2\xi}}; \\
3) \quad |a_1b_1| = |a_3b_3| = 2|a_2b_2| = 4a, \quad \sigma_{xx}^{b_2}(\xi) \approx \sigma_{yy}^{b_2}(\xi) \approx 0.10p\sqrt{\frac{a}{2\xi}}, \\
& \sigma_{xx}^{a_3}(\xi) \approx \sigma_{yy}^{a_3}(\xi) \approx 0.57p\sqrt{\frac{a}{2\xi}}, \\
& \sigma_{xx}^{b_3}(\xi) \approx \sigma_{yy}^{b_3}(\xi) \approx 2.63p\sqrt{\frac{a}{2\xi}}. \quad (6.9)
\end{aligned}$$

Сопоставляя приведенные графики, а также соотношения (6.8) и (6.9), видим, что количество разрезов и различия в их длинах существенно влияют на особенности напряженного состояния как около концов внутреннего разреза  $a_2b_2$ , так и на оси  $y$ , проходящей через его центр.

Результаты, полученные в данной работе, позволяют сделать следующие выводы.

1. Краевая задача теории упругости о плоскости с конечным и бесконечным числом разрезов на вещественной оси может быть сведена к решению математических задач Гильберта—Привалова для двух регулярных функций Г. В. Колосова.

2. Достаточное условие существования такого решения заключается в том, что внешние усилия на контуре каждого из разрезов должны быть самоуравновешены.

3. Аналитическое решение задач 3, 4 (см. рис. 1) существует для конечного числа разрезов  $N$  и отсутствует, когда  $N \rightarrow \infty$ .

## Литература

1. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений / ред. Ю. Мураками. Т. 1. М.: Мир, 1990. 448 с.
2. Колосов Г. В. Применение комплексной переменной к теории упругости. Л.; М., 1935. 215 с.
3. Даль Ю. М. О формулах Г. В. Колосова в плоской задаче теории упругости при наличии периодических разрезов // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2014. Вып. 2. С. 228–236.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
5. Westergaard Y. M. Bearing pressures and cracks // J. Appl. Mech. 1939. Vol. 6, N 2. P. 49–53.
6. Новожиллов В. В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.

Статья поступила в редакцию 22 октября 2015 г.

## Сведения об авторе

Даль Юрий Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор; ymdahl@yandex.ru

## SOME BASIC PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR PLANE WITH THE CUTS

Yuriy M. Dahl

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; ymdahl@yandex.ru

It was found the new solutions for the elastic plane with arbitrary quantity of cuts on real axis. Two basic cases were investigated. The first is: the both borders of cuts are load with concentrated forces, but on the infinity there are no stresses. The second is: the both borders of cuts are free, however in the infinity the plane has stretched out for external stresses.

*Keywords:* theory of elasticity, complex variable, Kolosov's formulas, the straight cuts.

## References

1. *Reference book of stress intensity coefficients 1* (ed. by Yu. Murakami, Mir, Moscow, 1990, 448 p.) [in Russian].
2. Kolosov G. V., *Application of complex variable to theory of elasticity* (Leningrad, Moscow, 1935, 215 p.) [in Russian].
3. Dahl Yu. M., “About Kolosov’s formulas in a plane problem of the theory of elasticity in the presence of periodical cuts”, *Vestn. St. Petersburg Univ. Ser. 1.* **1**(59), Issue 2, 226–236 (2014) [in Russian].
4. Muschelishwili N. I., *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity* (Nauka, Moscow, 1966, 707 p.) [in Russian].
5. Westergaard Y. M., “Bearing pressures and cracks”, *J. Appl. Mech.* **6**(2), 49–53 (1939).
6. Novojilov V. V., *Theory of elasticity* (Sudpromgiz, Leningrad, 1958. 370 p.) [in Russian].