УДК 531.011 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 1

СВЯЗЬ УРАВНЕНИЙ УДВАДИА—КАЛАБЫ С ОБОБЩЕННЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ЛАГРАНЖА И МАДЖИ

С. А. Зегжда[1], *Н. В. Наумова*[1], *Ш. Х. Солтаханов*[2], *М. П. Юшков*[1]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
[2] Чеченский государственный университет,
Российская Федерация, 364051, Грозный, ул. А. Шерипова, 32

В работе рассматривается новая форма матричных уравнений движения неголономных систем, подчиненных линейным неголономным связям второго порядка Ф. Е. Удвадиа и Р. Е. Калабы. Эти уравнения содержат все обобщенные координаты рассматриваемой механической системы и в то же время не содержат реакций связей.

Показывается, что рассматриваемые уравнения естественным образом получаются из обобщенных уравнений Лагранжа и Маджи или при использовании контравариантной формы уравнений движения механической системы, стесненной неголономными линейными связями второго порядка. Отмечается, что подобный прием для исключения реакций из дифференциальных уравнений обычно применяется при практическом изучении движения механических систем, подчиненных голономным или классическим неголономным связям первого порядка. В результате получаются уравнения движения, содержащие лишь обобщенные координаты механической системы, что соответствует уравнениям в форме Удвадиа—Калабы. Библиогр. 7 назв.

Ключевые слова: неголономная механика, линейные неголономные связи второго порядка, уравнения Удвадиа—Калабы, обобщенные уравнения Лагранжа второго рода с множителями, обобщенные уравнения Маджи.

1. Введение. В работе [1] Ф. Е. Удвадиа и Р. Е. Калаба предложили новую форму матричных уравнений движения неголономных систем, подчиненных линейным неголономным связям второго порядка. Количество уравнений соответствует числу обобщенных координат рассматриваемой механической системы, причем уравнения не содержат реакций связей. Это является безусловным преимуществом представленных уравнений, поэтому авторы работы [1] считают, что «уравнения движения, полученные в этой статье, являются, по-видимому, самыми простыми и всеобъемлющими из выведенных до сих пор». Для получения этих уравнений применяется довольно специфическое преобразование Мора (Мура)—Пенроуза [2, 3], в русскоязычной литературе говорят, что в этом случае используется псевдообратная матрица.

В предлагаемой работе показывается, что выведенные авторами [1] уравнения естественным образом получаются при использовании обобщенных уравнений Маджи и Лагранжа или при использовании контравариантной формы уравнений движения механической системы, стесненной неголономными линейными связями второго порядка.

2. Использование касательного пространства для векторного представления движения неголономных систем. Рассмотрим [4] движение механической системы с s степенями свободы в касательном пространстве к многообразию всех возможных ее положений в данный момент времени. Будем описывать движение с помощью криволинейной системы координат $q = (q^1, \ldots, q^s)$, имеющей основной и взаимный базисы $\{\mathbf{e}_\sigma\}$, $\{\mathbf{e}^\tau\}$, $\sigma, \tau = \overline{1, s}$, при этом

$$\mathbf{e}_\sigma \cdot \mathbf{e}^\tau = \delta_\sigma^\tau\,, \qquad \sigma, \tau = \overline{1, s}\,, \tag{2.1}$$

где δ_σ^τ — символы Кронекера.

Пусть на движение данной механической системы наложены связи (именно такие связи рассматриваются в работе [1])

$$f_2^{\varkappa}(t,q,\dot q,\ddot q) \equiv a_{\sigma}^{l+\varkappa}(t,q,\dot q)\,\ddot q^{\,\sigma} + a_0^{l+\varkappa}(t,q,\dot q) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \qquad l = s-k\,. \tag{2.2}$$

В таком виде можно представить продифференцированные неголономные связи первого порядка $f_1^{\varkappa}(t,q,\dot q)=0$ и голономные связи $f_0^{\varkappa}(t,q)=0$ $(\varkappa=\overline{1,k})$ после их двойного дифференцирования по времени. Помимо этого, в виде (2.2) могут задаваться и непосредственно линейные неголономные связи второго порядка (см., например, статью [5]). Отметим, что в работе [6] впервые был приведен и пример программной нелинейной неголономной связи второго порядка, осуществляемой в одной из возможных задач космонавтики.

Для изучения движения введем преобразования между обобщенными ускорениями $\ddot q = (\ddot q^{\,1},\, \dots\, ,\ddot q^{\,s})$ и псевдоускорениями $w_* = (w_*^1,\, \dots\, , w_*^s)$:

$$w_*^{\rho} = w_*^{\rho}(t,q,\dot q,\ddot q)\,, \quad \ddot q^{\,\sigma} = \ddot q^{\,\sigma}(t,q,\dot q,w_*)\,, \qquad \rho,\sigma = \overline{1,s}\,. \tag{2.3}$$

Здесь переменные $t,q,\dot q$ играют роль параметров. Первую группу преобразований удобно конкретизировать следующим образом:

$$w_*^{\lambda} = f_*^{\lambda}(t,q,\dot q,\ddot q), \quad \lambda=\overline{1,l} \quad (l=s-k), \quad w_*^{l+\varkappa} = f_2^{\varkappa}(t,q,\dot q,\ddot q), \quad \varkappa=\overline{1,k}. \tag{2.4}$$

Согласно выбору квазискоростей в виде (2.4) последние оказываются равными нулю, а первые зависят от выбора исследователем функций $f_*^{\lambda}(t,q,\dot q,\ddot q)$, $\lambda=\overline{1,l}$.

Задание прямого и обратного преобразований (2.3), (2.4) разбивает рассматриваемое s-мерное пространство на прямую сумму подпространств K и L соответственно с базисами [4] $\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa} = (\partial w_*^{l+\varkappa}/\partial \ddot q^{\,\tau})\,\mathbf{e}^{\tau} = a_{\sigma}^{l+\varkappa}(t,q,\dot q)\,\mathbf{e}^{\tau} \equiv \boldsymbol{\nabla}'' f_2^{\varkappa}$, $\varkappa=\overline{1,k}$, и $\boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda} = (\partial \ddot q^{\,\sigma}/\partial w_*^{\lambda})\,\mathbf{e}_{\sigma}$, $\varkappa=\overline{1,k}$. Использованные здесь обобщенные операторы Гамильтона $\boldsymbol{\nabla}'' f_2^{\varkappa}$, $\varkappa=\overline{1,k}$, были введены Н. Н. Пóляховым [7]. Теперь в случае задания идеальных связей (2.2) векторное уравнение движения механической системы в касательном пространстве может быть записано в виде [4]

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \Lambda_{\varkappa}\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}\,, \qquad \varkappa=\overline{1,k}\,, \tag{2.5}$$

где M — масса всей механической системы, $\mathbf{W}$ — вектор ускорения системы, $\mathbf{Y}$ — вектор активных сил, действующих на систему, $\Lambda_{\varkappa}$ — обобщенные реакции связей.

3. Обобщенные уравнения Лагранжа и Маджи. Умножая уравнение (2.5) на векторы $\mathbf{e}_{\rho}$, $\rho=\overline{1,s}$, и учитывая формулы (2.1), получаем обобщенные уравнения Лагранжа второго рода с множителями

$$\begin{gathered} MW_{\rho} \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^{\rho}} - \frac{\partial T}{\partial q^{\rho}} \equiv M\left(\mathrm{g}_{\rho\sigma}\ddot q^{\,\sigma} + \Gamma_{\rho,\alpha\beta}\,\dot q^{\alpha}\,\dot q^{\beta}\right) = Q_{\rho} + \Lambda_{\varkappa}\frac{\partial f_2^{\varkappa}}{\partial \ddot q^{\,\rho}}\,, \\ \rho,\sigma=\overline{1,s}\,, \quad \varkappa=\overline{1,k}\,, \quad q^0 = t\,. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь коэффициенты $\mathrm{g}_{\rho\sigma}$ (и аналогичные им при нестационарном базисе, когда вводится $q^0=t$) задаются выражением кинетической энергии, а коэффициенты $\Gamma_{\rho,\alpha\beta}$ являются символами Кристоффеля первого рода и аналогичными им выражениями при нестационарном базисе.

Если же уравнение (2.5) умножить на векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_{\rho}$, $\rho=\overline{1,s}$, получим две группы обобщенных уравнений Маджи:

$$\big(MW_{\sigma} - Q_{\sigma}\big)\,\frac{\partial \ddot q^{\,\sigma}}{\partial w_*^{\lambda}} = 0\,, \qquad \lambda=\overline{1,l}\,, \quad \sigma=\overline{1,s}\,, \tag{3.2}$$

$$\left(MW_\sigma - Q_\sigma\right)\frac{\partial \ddot{q}^{\,\sigma}}{\partial w_*^{l+\varkappa}} = \Lambda_\varkappa\,, \qquad \varkappa=\overline{1,k}\,, \quad \sigma=\overline{1,s}\,. \tag{3.3}$$

Полученные уравнения Лагранжа второго рода с множителями и уравнения Маджи называются *обобщенными*, так как они являются расширением соответствующих уравнений неголономной механики при неголономных связях первого порядка на случай связей (2.2).

Контравариантную форму уравнений движения получим, умножая закон (2.5) на векторы $\mathbf{e}^\sigma$, $\sigma=\overline{1,s}$:

$$MW^\sigma \equiv M\big(\ddot{q}^{\,\sigma}+\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta\big) = Q^\sigma + \Lambda_\varkappa\,\mathrm{g}^{\sigma\rho}\,\frac{\partial f_2^\varkappa}{\partial \ddot{q}^{\,\rho}}\,, \quad \sigma,\rho=\overline{1,s}\,, \quad \varkappa=\overline{1,k}\,.$$

Разрешая эту систему относительно обобщенных ускорений, будем иметь

$$\ddot{q}^{\,\sigma} = Q^\sigma/M + \Lambda_\varkappa\,\mathrm{g}^{\sigma\rho}\,\frac{\partial f_2^\varkappa}{\partial \ddot{q}^{\,\rho}}\bigg/ M - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta\,, \quad \sigma,\rho=\overline{1,s}\,, \quad \varkappa=\overline{1,k}\,. \tag{3.4}$$

Здесь $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$ — символы Кристоффеля второго рода и аналогичные им функции, а $\mathrm{g}^{\sigma\rho}$ — элементы дополнительного метрического тензора. Отметим, что эта форма записи контравариантных уравнений эквивалентна системе обобщенных уравнений Лагранжа второго рода с множителями, разрешенной относительно обобщенных ускорений.

4. Связь уравнений Удвадиа—Калабы с обобщенными уравнениями Лагранжа и Маджи. Полученные дифференциальные уравнения (3.1), (3.2), (3.4) при заданных начальных данных приходится интегрировать совместно с уравнениями связей (2.2). При этом система дифференциальных уравнений (3.2), (2.2) записана относительно всех неизвестных функций $q=(q^1,\,\dots\,,q^s)$ и не содержит множителей Лагранжа $\Lambda_\varkappa$, $\varkappa=\overline{1,k}$. В этом отношении она оказывается равноценной уравнениям Удвадиа—Калабы.

Труднее решать систему уравнений (3.1), (2.2), так как она содержит наряду с производными от обобщенных координат первые степени неизвестных функций $\Lambda_\varkappa$, $\varkappa=\overline{1,k}$. Исключим последние из этих уравнений и составим систему s дифференциальных уравнений относительно функций $q=(q^1,\,\dots\,,q^s)$. Тогда получим, как указывалось выше, формулы (3.4). Подставив эти выражения обобщенных ускорений в уравнения связей, получим систему алгебраических уравнений относительно множителей Лагранжа:

$$A^{\varkappa\varkappa^*}\Lambda_{\varkappa^*} = B^\varkappa\,, \quad \varkappa,\varkappa^*=\overline{1,k}\,, \tag{4.1}$$

где введены обозначения

$$A^{\varkappa\varkappa^*}(t,q,\dot{q}) = a_\sigma^{l+\varkappa}\,\mathrm{g}^{\sigma\rho}\,\frac{\partial f_2^{\varkappa^*}}{\partial \ddot{q}^{\,\rho}}\,, \quad B^\varkappa = a_\sigma^{l+\varkappa}\,\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta - a_\sigma^{l+\varkappa}\,Q^\sigma - Ma_0^{l+\varkappa}\,.$$

Разрешая систему (4.1), находим обобщенные реакции связей (2.2) как функции $t,q,\dot{q}$:

$$\Lambda_{\varkappa^*} = C_{\varkappa^*}(t,q,\dot{q})\,, \quad \varkappa^*=\overline{1,k}\,, \qquad C_{\varkappa^*} = A_{\varkappa^*\varkappa}\,B^\varkappa\,.$$

Здесь $A_{\varkappa^*\varkappa}$ являются элементами матрицы, обратной к матрице $(A^{\varkappa\varkappa^*})$. Подставляя найденные выражения множителей Лагранжа в формулы (4.1), получаем интересующий нас вид дифференциальных уравнений движения механической системы:

$$\ddot{q}^\sigma = D^\sigma(t,q,\dot{q}), \quad \sigma=\overline{1,s}, \quad D^\sigma(t,q,\dot{q}) = Q^\sigma/M + C_{\varkappa^*}\mathrm{g}^{\sigma\rho}\frac{\partial f_2^{\varkappa^*}}{\partial\ddot{q}^\rho}\bigg/M - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta. \tag{4.2}$$

Отметим, что подобный прием исключения реакций из дифференциальных уравнений обычно применяется при практическом изучении движения механических систем, подчиненных голономным или классическим неголономным связям первого порядка.

Исключение множителей Лагранжа из уравнений (3.1) можно провести и другим способом. Подставим их выражения (3.3) в уравнения (3.1). Тогда будем иметь

$$
\begin{aligned}
& E_{\rho\sigma}(t,q,\dot q)\,\ddot q^{\,\sigma} = F_\rho(t,q,\dot q)\,, \\
& E_{\rho\sigma} = M\left(\mathrm{g}_{\rho\sigma} - \mathrm{g}_{\rho^*\sigma}\,\frac{\partial \ddot q^{\,\rho^*}}{\partial w_*^{l+\varkappa}}\,\frac{\partial f_2^\varkappa}{\partial \ddot q^{\,\rho}}\right), \\
& F_\rho = Q_\rho - Q_{\rho^*}\,\frac{\partial \ddot q^{\,\rho^*}}{\partial w_*^{l+\varkappa}}\,\frac{\partial f_2^\varkappa}{\partial \ddot q^{\,\rho}} + M\,\Gamma_{\rho^*,\alpha\beta}\dot q^\alpha \dot q^\beta\,\frac{\partial \ddot q^{\,\rho^*}}{\partial w_*^{l+\varkappa}}\,\frac{\partial f_2^\varkappa}{\partial \ddot q^{\,\rho}} - M\,\Gamma_{\rho,\alpha\beta}\dot q^\alpha \dot q^\beta\,, \\
& \sigma,\rho,\rho^* = \overline{1,s}\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,.
\end{aligned}
$$

Отсюда получаем

$$
\ddot q^{\,\sigma} = G^\sigma(t,q,\dot q)\,, \quad G^\sigma(t,q,\dot q) = E^{\sigma\rho}(t,q,\dot q)\,F_\rho(t,q,\dot q)\,, \qquad \sigma,\rho = \overline{1,s}\,, \tag{4.3}
$$

где $E^{\sigma\rho}$ — элементы матрицы, обратной к матрице $(E_{\rho\sigma})$.

Уравнения (4.2), (4.3), полученные из обобщенных уравнений Лагранжа второго рода с множителями и обобщенных уравнений Маджи, являются уравнениями Удвадиа—Калабы, записанными в тензорной форме. Заметим также, что эти уравнения можно получить и с помощью вводимого в монографии [4] линейного преобразования сил.

Литература

1. *Udwadia F. E., Kalaba R. E.* A new perspective on constrained motion // Proceedings of the Royal Society. London. 1992. Vol. A439, N 1906. P. 407–410.

2. *Moore E. H.* On the reciprocal of the general algebraic matrix // Bidl. Am. math. Soc. 1920. Vol. 26. P. 394–395.

3. *Penrose R.* A generalized inverse of matrices // Proc. Camb. phil. Soc. 1955. Vol. 51. P. 406–413.

4. *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Неголономная механика. Теория и приложения. М.: Наука, Физматлит, 2009. 344 с.

5. *Kitzka F.* An example for the application of a nonholonomic constraint of 2nd order in particle mechanics // ZAMM. 1986. Vol. 66, N 7. S. 312–314.

6. *Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Уравнения движения одной неголономной системы при наличии связи второго порядка // Вестн. Ленингр. ун-та. 1991. Вып. 4, № 22. С. 26–29.

7. *Поляхов Н. Н.* О дифференциальных принципах механики, получаемых из уравнений движения неголономных систем // Вестн. Ленингр. ун-та. 1974. Вып. 3, № 13. С. 106–116.

Статья поступила в редакцию 22 октября 2015 г.

Сведения об авторах

Зегжда Сергей Андреевич — доктор физико-математических наук, профессор

Наумова Наталья Владимировна — кандидат физико-математических наук, доцент; nat_n75@mail.ru

Солтаханов Шервани Хусаинович — доктор физико-математических наук, профессор; soltakhanov@yandex.ru

Юшков Михаил Петрович — доктор физико-математических наук, профессор; yushkovmp@mail.ru

RELATIONSHIP BETWEEN THE UDWADIA—KALABA EQUATIONS AND THE GENERALIZED LAGRANGE AND MAGGI'S EQUATIONS

Sergey A. Zegzhda[†], *Natalya V. Naumova*[1], *Shervani Kh. Soltakhanov*[2], *Mikhail P. Yushkov*[1]

[1] St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; nat_n75@mail.ru, yushkovmp@mail.ru

[2] Chechen State University, ul. A. Sheripova, 32, Grozny, 364051, Russian Federation; soltakhanov@yandex.ru

In their paper "A new perspective on constrained motion" F. E. Udwadia and R. E. Kalaba offered a new form of matrix equations of motion for nonholonomic systems subject to linear nonholonomic second-order constraints. The obtained equations contain all the generalized coordinates of the mechanical system in question, and at the same time they do not contain the constraint reaction forces. This is an undoubted advantage of the equations presented, so the authors assume that "the equations of motion obtained in this paper appear to be the simplest and most comprehensive so far discovered". To write these equations the authors apply a rather specific transformation proposed by Moore already in 1920 and developed by Penrose in 1955. In Russian literature it is said that in this case a pseudoinverse matrix is used.

The present paper reveals that the equations obtained by those authors can be naturally derived from the generalized Lagrange and Maggi's equations or when using a contravariant form of the equations of motion of a mechanical system subject to linear nonholonomic second-order constraints. It is noted that a similar technique for eliminating the reaction forces from differential equations is usually used in practical studying of motion of mechanical systems that are subject to holonomic and classical nonholonomic first-order constraints. As a result, we obtain the equations of motion containing only the generalized coordinates of a mechanical system, what corresponds to the equations of Udwadia—Kalaba form. Refs 7.

Keywords: nonholonomic mechanics, linear nonholonomic second-order constraints, the Udwadia—Kalaba equations, the generalized Lagrange equations of second kind with multipliers, generalized Maggi's equations.

References

1. Udwadia F. E., Kalaba R. E., "A new perspective on constrained motion", *Proceedings of the Royal Society* **A439**(1906), 407–410 (London, 1992).

2. Moore E. H., "On the reciprocal of the general algebraic matrix", *Bidl. Am. math. Soc.* **26**, 394–395 (1920).

3. Penrose R., "A generalized inverse of matrices", *Proc. Camb. phil. Soc.* **51**, 406–413 (1955).

4. Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., *Nonholonomic mechanics. Theory and applications* (Nauka, Fizmatlit, Moscow, 2009, 344 p.) [in Russian].

5. Kitzka F., "An example for the application of a nonholonomic constraint of 2nd order in particle mechanics", *ZAMM* **66**(7), 312–314 (1986).

6. Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., "Equations of motion for a certain nonholonomic system in the presence of a 2nd order constraint", *Vestn. Leningr. Univ.* (22), Issue 4, 26–29 (1991) [in Russian].

7. Polyakhov N. N., "On differential principles in mechanics obtained from the equations of motion for nonholonomic systems", *Vestn. Leningr. Univ.* (13), Issue 3, 106–116 (1974) [in Russian].