

## О ПОСТРОЕНИИ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТЕЙ ЕСТЕСТВЕННО-ЗАКРУЧЕННОГО СТЕРЖНЯ\*

*Н. В. Курбатова, Н. М. Романова, Ю. А. Устинов*

Южный федеральный университет,  
Российская Федерация, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а

В статье рассматриваются задачи Сен-Венана для естественно-закрученного стержня с прямоугольным поперечным сечением. Исследования задач проводятся на основе метода однородных решений в совокупности с методом конечных элементов. Зависимости элементов матрицы жесткостей от крутки и напряженно-деформированное состояние сечений представлены графически. Библиогр. 17 назв. Ил. 3.

*Ключевые слова:* естественно-закрученный стержень, задача Сен-Венана, матрица жесткостей.

Первые подходы построения решений задач Сен-Венана о растяжении, кручении и изгибе естественно-закрученных стержней (ЕЗС) были сделаны в работах [1, 2]. Попытки исследования задач изгиба без привлечения дополнительных гипотез не привели к существенным результатам. Однако потребность в решении конкретных практических задач обусловила развитие прикладных теорий [3–7].

В работах [8, 9] методом однородных решений и спектральной теории операторов решение задачи Сен-Венана представлено в виде бесконечного ряда по элементарным решениям (ЭР), в котором выделена группа из двенадцати ЭР. Шесть из них описывают смещение ЕЗС как твердого тела, а напряженное состояние в поперечном сечении остальных шести ЭР таково, что их главный вектор и главный момент отличны от нуля и могут быть уравновешены усилиями, приложенными к торцам стержня. Совокупность таких элементарных решений названа «решением Сен-Венана». Это понятие включает в себя шесть элементарных решений: решения Сен-Венана задачи растяжения-сжатия, задачи кручения, задачи чистого изгиба и изгиба поперечными силами. Построение решений каждой из перечисленных задач сведено к двумерным краевым задачам на поперечном сечении ЕЗС.

Заметим, что для построения аналогичных решений для призмы Сен-Венан использовал полуобратный метод [10, 11]. В [9] для цилиндра строго доказано, что главный вектор и главный момент напряжений, отвечающие остальным решениям бесконечного ряда (не входящим в выделенную группу ЭР), равны нулю, и эта часть общего решения локализуется у торцов стержня, а обоснование принципа Сен-Венана для ЕЗС приводится в [12].

Аналитические решения всех шести задач Сен-Венана построены в виде двух членов разложений по малому параметру безразмерной «крутки»  $\tau_0 = h\tau$ ,  $\tau$  — относительный угол закручивания;  $h$  — характерный линейный размер сечения. В первом приближении при некоторых дополнительных упрощениях эти решения совпадают с решениями теории Кирхгофа—Клебша.

---

\*Работа выполнена при частичной поддержке проекта «Математическое моделирование неоднородных и многофазных структур» (в рамках Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН № 1 «Фундаментальные проблемы математического моделирования»).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2016

Система уравнений пространственной теории упругости сведена к системам двумерных уравнений на сечении ЕЗС [13], и для малых круток в случае эллиптического сечения сделаны оценки эффективных жесткостей.

В работах [14, 15] методом конечных элементов (МКЭ) исследована задача Сен-Венана растяжения-кручения ЕЗС, в [16] — задача о чистом изгибе, а в работе [17] строится решение краевой задачи, отвечающее задаче изгиба поперечной силой.

В настоящей работе на основе решения Сен-Венана для ЕЗС с прямоугольным поперечным сечением строится матрица жесткостей в широком диапазоне изменения величины крутки  $\tau$ ,  $0 \leq \tau < \infty$ .

1. Пусть  $x_1, x_2, x_3$  — декартова система координат с ортами  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ . Объем ЕЗС получается винтовым движением плоской фигуры  $S$  параллельно плоскости  $x_1x_2$  вдоль оси  $x_3$ . Угол поворота сечения, находящегося на расстоянии  $x$  по оси  $x_3$  от начала координат, равен  $\varphi = \tau x$ . В сопутствующей системе координат  $\xi_1, \xi_2, \xi_3 = \xi$  оси  $\xi_1$  и  $\xi_2$  жестко связаны с  $S$  в процессе ее движения и направлены по главным осям инерции. Связь между координатами обеих систем определяется соотношениями

$$\xi_1 = x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi, \quad \xi_2 = -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi, \quad \xi = x_3.$$

Орты сопутствующей системы координат обозначим  $\mathbf{e}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Таким образом,

$$\mathbf{R} = \xi_\alpha \mathbf{e}_\alpha + \xi \mathbf{i}_3 \tag{1}$$

— радиус-вектор произвольной точки объема ЕЗС. Уравнение контура  $\partial S$  области  $S$   $\xi_{\alpha 0} = \xi_{\alpha 0}(s)$ ,  $\xi_{\alpha 0}$  — координаты точки контура и  $s$  — расстояние от некоторой фиксированной точки по дуге контура. Тогда касательный  $\mathbf{t}$  и нормальный  $\mathbf{n}$  орты контура  $\partial S$  выражаются следующим образом:

$$\mathbf{t} = \xi'_{\alpha 0} \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{n} = n_\alpha \mathbf{e}_\alpha = \xi'_{20} \mathbf{e}_1 - \xi'_{10} \mathbf{e}_2, \tag{2}$$

где  $\xi'_{10}, \xi'_{20}$  — производные  $\xi_{10}, \xi_{20}$  по  $s$ . Проекция внешней нормали  $\mathbf{N}$  к боковой поверхности  $\Gamma$  ЕЗС на оси сопутствующей системы координат таковы:

$$N_1 = n_1 = \xi'_{20}, \quad N_2 = n_2 = -\xi'_{10}, \quad N_3 = \tau b_n,$$

$$b_n = n_2 \xi_1 - n_1 \xi_2 = \frac{d}{ds} \left( \frac{r^2}{2} \right).$$

Будем считать, что  $0 \leq x \leq L$ , где  $L$  — длина ЕЗС.

Для постановки и исследования задачи Сен-Венана приведем основные соотношения теории упругости в сопутствующей системе координат и, опираясь на соотношения (1), (2), введем основной и взаимный базисы:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\alpha &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi_\alpha} = \mathbf{e}_\alpha, & \mathbf{R}_3 &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z} = \mathbf{i}_3 - \tau \xi_2 \mathbf{e}_1 + \tau \xi_1 \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{R}^1 &= \mathbf{e}_1 + \tau \xi_2 \mathbf{i}_3, & \mathbf{R}^2 &= \mathbf{e}_2 - \tau \xi_1 \mathbf{i}_3, & \mathbf{R}^3 &= \mathbf{i}_3 = \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Учитывая, что метрический тензор  $\mathbf{g}$  в смешанном базисе совпадает с единичным ( $g_i^j = \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}^j = \delta_{ij}$ ), и используя следующее выражение:

$$\nabla = \mathbf{R}^j \partial_j = \mathbf{e}_\alpha \partial_\alpha + \mathbf{e}_3 (\partial + \tau D), \tag{3}$$

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}, \quad \partial = \partial_3 = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad D = \xi_2 \partial_1 - \xi_1 \partial_2,$$

уравнение равновесия представляется в векторном виде

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \sigma_\alpha + (\partial + \tau D)\sigma &= 0, \\ \sigma_\alpha &= \sigma_{\alpha\ell} \mathbf{e}_\ell, \quad \sigma = \sigma_{3\ell} \mathbf{e}_\ell, \quad \ell = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Проектируя (4) на оси сопутствующей системы координат, получаем

$$\begin{aligned} \partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} + \partial \sigma_{13} + \tau(D\sigma_{13} - \sigma_{23}) &= 0, \\ \partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} + \partial \sigma_{23} + \tau(D\sigma_{23} + \sigma_{13}) &= 0, \\ \partial_1 \sigma_{13} + \partial_2 \sigma_{23} + \partial \sigma_{33} + \tau D\sigma_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Для компонент тензоров деформаций и напряжений имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \partial_1 u_1, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2), \quad \varepsilon_{22} = \partial_2 u_2, \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2}[\partial_1 u_3 + (\partial + \tau D)u_1 - \tau u_2], \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2}[\partial_2 u_3 + (\partial + \tau D)u_2 + \tau u_1], \quad \varepsilon_{33} = (\partial + \tau D)u_3. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\mu[(1 + \kappa)\partial_1 u_1 + \kappa\partial_2 u_2 + \kappa(\partial + \tau D)u_3], \\ \sigma_{12} &= \mu(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1), \\ \sigma_{22} &= 2\mu[(1 + \kappa)\partial_2 u_2 + \kappa\partial_1 u_1 + \kappa(\partial + \tau D)u_3], \\ \sigma_{13} &= \mu(\partial_1 u_3 - \tau u_2 + (\partial + \tau D)u_1), \\ \sigma_{23} &= \mu(\partial_2 u_3 + \tau u_1 + (\partial + \tau D)u_2), \\ \sigma_{33} &= 2\mu[\kappa\partial_1 u_1 + \kappa\partial_2 u_2 + (1 + \kappa)(\partial + \tau D)u_3]. \end{aligned} \quad (7)$$

Будем считать, что боковая поверхность ЕЗС свободна от напряжений, т. е.

$$\mathbf{N} \cdot \sigma \Big|_\Gamma = 0, \quad (8)$$

а на торцах при  $z = 0$  и при  $z = L$  заданы следующие граничные условия:

$$\mathbf{u}(0) = 0, \quad \sigma(L) = p.$$

**2.** Уравнение равновесия (5) и граничное условие (8) могут быть представлены в операторном виде:

$$L_{1\tau}(\partial)\mathbf{u} \equiv \{L_\tau(\partial)\mathbf{u}, M_\tau(\partial)\mathbf{u}\} = 0, \quad (9)$$

где операторы  $L_\tau$ ,  $M_\tau$  определены в [9]. Отыскивая решение в виде

$$\mathbf{u}(\xi) = e^{\gamma\xi} \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}(\xi_1, \xi_2) \quad (10)$$

и подставляя (10) в (9), получаем спектральную задачу на сечении:

$$L_{\tau 1}(\gamma)\mathbf{a} \equiv \{L_\tau(\gamma)\mathbf{a}, M_\tau(\gamma)\mathbf{a}\} = 0. \quad (11)$$

В [9] показано, что задача (11) имеет три четырехкратных собственных значения  $\gamma_0 = 0$ ,  $\gamma_{\pm 1} = \pm i\tau$ , им соответствуют 12 элементарных решений Сен-Венана:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_1(\xi) &= \mathbf{u}_2^*(\xi) = e^{i\tau\xi} \mathbf{a}_1, & \mathbf{u}_3(\xi) &= \mathbf{u}_4^*(\xi) = e^{i\tau\xi} (\xi \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3), \\
 \mathbf{u}_5(\xi) &= \mathbf{a}_5, & \mathbf{u}_6(\xi) &= \mathbf{a}_6, & \mathbf{u}_7(\xi) &= e^{i\tau\xi} \left( \frac{\xi^3}{6} \mathbf{a}_1 + \frac{\xi^2}{2} \mathbf{a}_3 + \xi \mathbf{a}_9 + \mathbf{a}_7 \right), \\
 \mathbf{u}_8(\xi) &= \mathbf{u}_7^*(\xi), & \mathbf{u}_9(\xi) &= \mathbf{u}_{10}^*(\xi) = e^{i\tau\xi} \left( \frac{\xi^2}{2} \mathbf{a}_1 + \xi \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_9 \right), \\
 \mathbf{u}_{11}(\xi) &= \xi \mathbf{a}_5 + \mathbf{a}_{11}, & \mathbf{u}_{12}(\xi) &= \xi \mathbf{a}_6 + \mathbf{a}_{12}, \\
 \mathbf{a}_1 &= \mathbf{a}_2^* = \{1, i, 0\}, & \mathbf{a}_3 &= \mathbf{a}_4^* = \{0, 0, -\zeta\}, & \mathbf{a}_5 &= \{0, 0, 1\}, \\
 \mathbf{a}_6 &= \{-\xi_2, \xi_1, 0\}, & \mathbf{a}_8 &= \mathbf{a}_7^*, & \mathbf{a}_{10} &= \mathbf{a}_9^*,
 \end{aligned} \tag{12}$$

(\*) — комплексное сопряжение. Решение Сен-Венана представим в виде

$$\mathbf{u}_S(\xi) = \sum_{\ell=1}^6 C_\ell \mathbf{u}_\ell(\xi) + \sum_{\ell=7}^{12} C_\ell \mathbf{u}_\ell(\xi - L).$$

Здесь первая сумма содержит шесть элементарных решений (12), определяющих смещение ЕЗС как твердого тела, а вторая — определяет напряженно-деформированное состояние типа Сен-Венана. В [9] сформулированы краевые задачи для определения  $\mathbf{a}_9$ ,  $\mathbf{a}_7$ ,  $\mathbf{a}_{11}$  и  $\mathbf{a}_{12}$  и соответствующие им вариационные постановки.

Для координат векторов  $\mathbf{a}_l$  и компонент тензоров напряжений, соответствующих элементарным решениям с индексом  $l$ , используем обозначения  $a_{i,l}$ ,  $\sigma_{mn,l}$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 \sigma_{mn,l} &= 0, & l &= 1, \dots, 6, \\
 \sigma_{mn,7} &= \mu e^{i\tau\xi} (\xi b_{mn,9} + b_{mn,7}), & \sigma_{mn,8} &= \sigma_{mn,7}^*, \\
 \sigma_{mn,9} &= \mu e^{i\tau\xi} b_{mn,9}, & \sigma_{mn,10} &= \sigma_{mn,9}^*, \\
 \sigma_{mn,11} &= \mu b_{mn,11}, & \sigma_{mn,12} &= b_{mn,12}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Подстановка (13) в соотношения обобщенного закона Гука (7) приводит к выражениям для следов напряжений  $b_{mn,l}$ ,  $l = 7, \dots, 12$  [9]. Компоненты главного вектора  $\mathbf{Q} = \{Q_{\xi 1}, Q_{\xi 2}, Q_3\}$  и главного момента  $\mathbf{M} = \{M_{\xi 1}, M_{\xi 2}, M_3\}$  напряжений  $\sigma_3 = \{\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}\}$ , действующих в сечении  $S$ , определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 Q_{\xi k} &= \int_S \sigma_{k3} dS, & M_{\xi 1} &= \int_S \xi_2 \sigma_{33} dS, \\
 M_{\xi 2} &= - \int_S \xi_1 \sigma_{33} dS, & M_3 &= \int_S (\xi_1 \sigma_{23} - \xi_2 \sigma_{13}) dS,
 \end{aligned} \tag{14}$$

где  $\sigma_{k3}$  — проекции векторов напряжений в сечении  $\xi = \text{const}$  на оси сопутствующей системы координат.

Используя (14) и соотношения обобщенной ортогональности, а также выражения для следов напряжений [9], получаем ненулевые элементы матрицы жесткостей

$$d_{11} = d_{22} = -d_{33} = -d_{44} = -d = \int_S \zeta^* b_{33,9} dS, \quad d_{31} = d_{42}^* = - \int_S \zeta^* b_{33,7} dS, \quad (15)$$

$$d_{55} = \int_S b_{33,11} dS, \quad d_{56} = d_{65} = \int_S b_{33,12} dS, \quad d_{66} = \int_S (\xi_1 b_{23,12} - \xi_2 b_{13,12}) dS.$$

Постоянные  $C_\ell$ ,  $\ell = 7, \dots, 12$ , определяются из следующей алгебраической системы:

$$\begin{aligned} -e^{i\tau\eta} \mu d C_7 &= Q_{\xi_1} - i Q_{\xi_2}, \\ e^{i\tau\eta} \mu [(d_{31} + \eta d) C_7 + d C_9] &= M_{\xi_2} + i M_{\xi_1}, \\ \mu (d_{55} C_{11} + d_{56} C_{12}) &= Q_3, \\ \mu (d_{56} C_{11} + d_{66} C_{12}) &= M_3, \quad \eta = \xi - L. \end{aligned}$$

**3.** На основе вариационной постановки задач, соответствующих задачам растяжения-кручения, чистого изгиба и изгиба поперечной силой, с помощью МКЭ в случае прямоугольного поперечного сечения ЕЗС была создана программа для определения координат векторов  $\mathbf{a}_7$ ,  $\mathbf{a}_9$ ,  $\mathbf{a}_{11}$  и  $\mathbf{a}_{12}$ .

Особенности реализации МКЭ были отражены в [15–17].

На рис. 1 изображены графики жесткостей ЕЗС при различных значениях  $\tau$ . В задаче на растяжение-сжатие для  $d_{55}$  характерно увеличение жесткости с ростом  $\tau$ . Жесткость  $d_{56}$  является характеристикой взаимодействия кручения и растяжения-сжатия; с ростом  $\tau$  меняется знак  $d_{56}$ , что отражает эффекты «раскручивания-закручивания» ЕЗС.

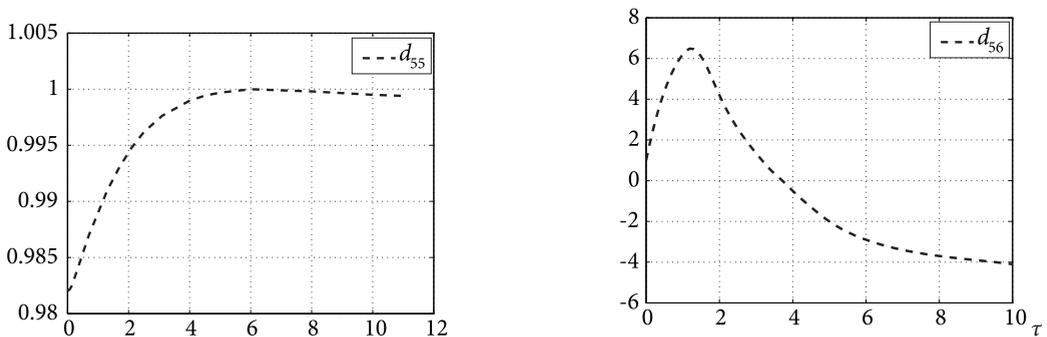


Рис. 1. Зависимости жесткостей от крутки в задаче растяжения-кручения

На рис. 2 приведены графики жесткостей  $d_{31}$ ,  $d_{33}$  при  $H_2/H_1 = 1$  (кривые  $b$  и  $d$  соответственно) и при  $H_2/H_1 = 2$  (кривые  $a$  и  $c$  соответственно),  $L = 1$  м,  $H_1 = 0.1$  м.

На рис. 3 представлено распределение нормированных напряжений  $\sigma_{33}^* = \sigma_{33}/\mu$  в сечении  $x_3 = 0.5235$  м при изгибе поперечной силой  $Q_2 = 100$  Н с максимальным значением  $\sigma_{33}^*$ , равным  $2.7397 \cdot 10^{-9}$ . Расчеты показали, что с ростом  $\tau_0$ , при  $\tau_0 > 4$  происходит формирование круга, вписанного в сечение, для которого, как и для малых  $\tau_0$ , свойственна линейная зависимость величины нормального напряжения, пропорциональная расстоянию от нейтральной линии и имеющая противоположные знаки в точках, симметричных относительно нее. Это, на наш взгляд, подтверждает

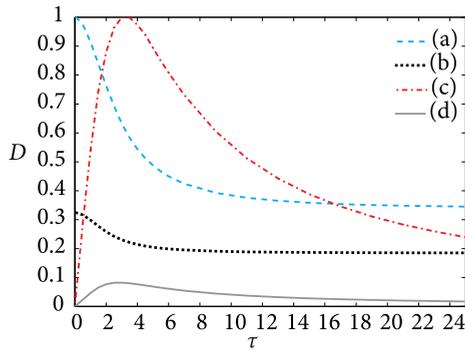


Рис. 2. Зависимости жесткостей стержня от крутки задачи изгиба

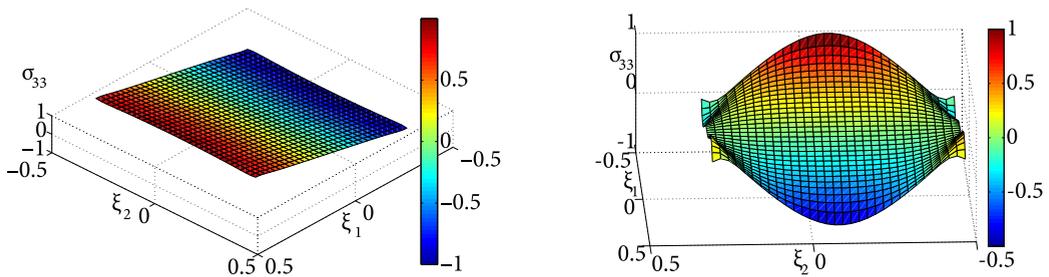


Рис. 3. Распределение по сечению нормальных напряжений  $\sigma_{33}$ : слева  $\tau = 0.02$ ; справа  $\tau = 22$

гипотезу автора [13] о том, что с ростом  $\tau$  *работает* ядро сечения, которое стягивается ко вписанному в сечение кругу, что является следствием быстрой осцилляции боковой поверхности ЕЗС.

## Литература

1. Риз П. М. Деформация естественно закрученных стержней // Докл. АН СССР. 1939. Т. 23, № 1. С. 18–21.
2. Джанелидзе Г. Ю., Лурье А. И. Задачи Сен-Венана для естественно скрученных стержней // Докл. АН СССР. 1939. Т. 24, № 4. С. 325–326.
3. Уздалев А. И., Иноземцев Г. Г., Зубков А. В., Алашазова О. В. Напряженное состояние естественно закрученного стержня // Прикладная механика. 1988. Т. 24, № 14. С. 103–108.
4. Елисеев В. В. Задача Сен-Венана и упругие модули для стержней с кривизной и кручением // Изв. АН СССР, МТТ. 1991. № 2. С. 167–176.
5. Заметалина Н. П., Прокопов В. К. Напряженное состояние естественно скрученных стержней типа спиральных сверл // Изв. АН Арм. ССР. 1974. Т. 27, № 3. С. 3–9.
6. Корольков В. И. К решению задачи о растяжении естественно закрученного стержня произвольного поперечного сечения в трехмерной постановке // Прикладная механика. 1988. Т. 4, № 12. С. 113–115.
7. Шорр Б. Ф. К теории закрученных неравномерно нагретых стержней // Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение. 1960. 1. С. 141–151.
8. Друзь А. Н., Поляков Н. А., Устинов Ю. А. Однородные решения и задачи Сен-Венана для естественно закрученного стержня // ПММ. 1996. Т. 60, № 4. С. 657–664.
9. Устинов Ю. А. Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров. М.: Наука, 2003.
10. *Saint-Venant*. Memoire sur la torsion des prismes, avec des considerations sur leur flexion, ainsi que sur l'equilibre interieur des solides elastiques en general, et des formules pratiques pour le calcul de leur resistance a divers efforts s'exercant simultanement // Mem. Savants Etrang. 1856. XIV. P. 233–560.
11. *Saint-Venant*. Memoire sur la flexion des prismes // Liouville, J. Math. I. P. 89–189.

12. Устинов Ю. А. Обоснование принципа Сен-Венана для естественно-закрученного стержня // ВМЖ. 2010. Т. 12. Вып. 1. С. 58–71.
13. Бердичевский В. Л., Старосельский Л. А. Изгиб, растяжение и кручение естественно-закрученных стержней // ПММ. 1985. Т. 49, № 6. С. 978–991.
14. Устинов Ю. А., Курбатова Н. В. Задачи Сен-Венана для стержней с физической и геометрической анизотропией // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. Мат. модел. 2001. Спецвыпуск. С. 154–157.
15. Kurbatova N. V. On a stretching-torsion of a naturally twisted rod // Proc. of XXXIII Summer School – Conference “Advanced Problems in Mechanics”. St. Petersburg. Russia. 2005. P. 59–60.
16. Курбатова Н. В., Романова Н. М. Конечно-элементное решение задачи изгиба для естественно-закрученного стержня // Тр. IX конф. «Совр. пробл. механики сплош. среды». Ростов-на-Дону: ЦВВР. 2005. Т. 1. С. 123–126.
17. Курбатова Н. В., Устинов Ю. А., Чумакова Е. С. Анализ напряженно-деформированного состояния естественно-закрученного стержня при изгибе поперечной силой на основе метода конечных элементов // Владикавказ. мат. журн. 2013. Т. 15, вып. 3. С. 45–53.

Статья поступила в редакцию 22 октября 2015 г.

#### Сведения об авторах

Курбатова Наталья Викторовна — кандидат физико-математических наук, доцент;  
nvk-ru@yandex.ru, nvk@math.sfedu.ru

Романова Наталья Михайловна — ассистент; sunshinemail@yandex.ru

Устинов Юрий Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор;  
ustinov@math.sfedu.ru

## ON STIFFNESS MATRIX CONSTRUCTION FOR NATURALLY TWISTED ROD

Natalia V. Kurbatova, Natalia M. Romanova, Yuriy A. Ustinov

Southern Federal University, ul. Milchakova, 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russian Federation;  
nvk-ru@yandex.ru, nvk@math.sfedu.ru, sunshinemail@yandex.ru, ustinov@math.sfedu.ru

Here we considered the Saint Venant problem for a naturally twisted rod with a rectangular cross-section. Research was conducted on the basis of homogeneous solutions in conjunction with the finite element method. The general solution is constructed as a linear combination of elementary solutions corresponding to three four-roots eigenvalues of spectral problem on the cross section. Elementary solutions determining the stress-strain state of Saint Venant type contain unknown eigenvectors and associated vectors. To determine of unknown solutions the authors formulated boundary value problems and their variational formulations previously. They are correspond to problems of stretching-torsion, pure bending and bending of the lateral force. Variational problems were solved using FEM. The stress-strain state of the rod was studied numerically and non-zero elements of the stiffness matrix were found in the case of square and rectangular cross-sections of the rod for the different values of twist. Graphically shows the numerical results for a wide range of change of the twist parameter  $\tau$ . Calculations showed that the identified patterns are consistent with the corresponding behavior untwisted rods (for small twist parameter), and with the growth of the twist, new effects, which confirm the hypothesis proposed earlier. Refs 17. Figs 3.

*Keywords:* naturally twisted rod, Saint-Venant problem, stiffness matrix.

## References

1. Reese P. M., “The deformation of naturally twisted rods”, *Dokl. AN USSR* **23**(1), 18–21 (1939) [in Russian].
2. Dzhaniidze G. Yu., Lurie A. I., “Saint-Venant problems for naturally twisted rods”, *Dokl. AN USSR* **24**(4), 325–326 (1939) [in Russian].
3. Uzdalev A. I., Inozemtsev G. G., Zubkov A. V., Alakhazova O. V., “The stress state of a naturally twisted rod”, *Int. Appl. Mech.* **24**(14), 103–108 (1988) [in Russian].
4. Yeliseyev V. V., “Saint-Venant problem and elastic modulus for rods with curvature and torsion”, *Izv. AN ASSSR, Mech. Solids* (2), 167–176 (1991) [in Russian].

5. Zametalina N. P., Prokopov V. K., "The stress state of a naturally twisted spiral rod", *Izv. AN Arm. SSR*. **27**(3), 3–9 (1974) [in Russian].
6. Korolkov V. I., "On stretching problem solution of a naturally twisted rod for arbitrary cross section in 3-D case", *Int. Appl. Mech.* **4**(12), 113–115 (1988) [in Russian].
7. Shorr B. F., "For the theory of twisted irregularly heated rods", *Izv. AN USSR, J. Mech. and Machin.* **1**, 141–151 (1960) [in Russian].
8. Druz A. N., Polyakov N. A., Ustinov Yu. A., "Homogeneous solutions and Saint-Venant problems for a naturally twisted rod", *J. Appl. Math. Mech.* **60**(4), 657–664 (1996) [in Russian].
9. Ustinov Yu. A., *Saint-Venant Problem for Pseudo-Cylinder* (Nauka, Moscow, 2003) [in Russian].
10. Saint-Venant, "Memoire sur la torsion des prismes, avec des considerations sur leur flexion, ainsi que sur l'equilibre interieur des solides elastiques en general, et des formules pratiques pour le calcul de leur resistance a divers efforts s'exercant simultanement", *Mem. Savants Etrang.* **XIV**, 233–560 (1856) [in France].
11. Saint-Venant, "Memoire sur la flexion des prismes", *Liouville, J. Math.* **I**, 89–189 [in France].
12. Ustinov Yu. A., "Proof of Saint-Venant principle for a naturally twisted rod", *VMJ* **12**(1), 58–71 (2010) [in Russian].
13. Berdichevskii V. L., Starosel'skii L. A., "Bending, extension, and torsion of naturally twisted rods", *J. Appl. Math. Mech.* **49**(6), 746–755 (1985).
14. Ustinov Y. A., Kurbatova N. V., "The Saint-Venant problems for rods with physical and geometrical anisotropy", *Izvestia of Universities. North-Caucas. Region. Math. Model. Natural Science. Special Issue* 154–157 (2001) [in Russian].
15. Kurbatova N. V., "On a stretching-torsion of a naturally twisted rod", *Proc. of XXXIII Summer School – Conference "Advanced Problems in Mechanics"* (St. Petersburg, Russia, 59–60, 2005).
16. Kurbatova N. V., Romanova N. M., "Finite element solution of the bending problem for a naturally twisted rod", *Proc. of IX intern. conference "Modern Problems of Continuum Mechanics"* **1**, 123–126 (Rostov-on-Don, 2005) [in Russian].
17. Kurbatova N. V., Ustinov Yu. A., Chumakova E. S., "Analysis of stress-strain state of the naturally twisted rod bending by transverse force on the basis of the finite element method", *Vladikavkazian Math. J.* **15**(3), 45–53 (2013) [in Russian].