

## СВОБОДНЫЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДЛИННОЙ ДВУХСТЕННОЙ УГЛЕРОДНОЙ НАНОТРУБКИ, ВНЕДРЕННОЙ В НЕОДНОРОДНУЮ УПРУГУЮ СРЕДУ

*Г. И. Михасев, М. Г. Ботогова*

Белорусский государственный университет,  
Республика Беларусь, 220030, Минск, пр. Независимости, 4

На основе модифицированных уравнений Флюгге и нелокальной теории упругости исследуются свободные осесимметричные колебания длинной двухстенной углеродной нанотрубки, внедренной в неоднородную упругую среду. Окружающая среда моделируется винклеровским основанием. Для учета сил взаимодействия стенок нанотрубки вводятся силы ван-дер-Ваальса. С использованием асимптотического метода Товстика строятся собственные формы в виде функций, затухающих вдали от линии на поверхности внешней стенки, на которой коэффициент постели упругого основания имеет локальный минимум. Найдены формы колебаний и соответствующие собственные частоты, отвечающие одинаково направленному и разнонаправленному движениям стенок. Обнаружено, что введение в модель параметра нелокальности «порождает» собственные формы колебаний трубки, которые не свойственны макроразмерным оболочкам. В частности, увеличение растягивающей силы приводит, во-первых, к большей степени локализации колебаний и росту амплитуды тангенциальных колебаний атомов, во-вторых — к убыванию частот в случае, когда трубка лежит в достаточно жесткой среде. Библиогр. 13 назв. Ил. 3. Табл. 1.

*Ключевые слова:* двухстенная углеродная нанотрубка, силы ван-дер-Ваальса, параметр нелокальности, неоднородная среда, свободные колебания, локализация, асимптотический метод.

**1. Введение.** Использование углеродных нанотрубок (УНТ) в качестве наполнителей при создании высокопрочных композиционных материалов [1] делает актуальной задачу исследования их динамических характеристик с учетом реакции окружающей упругой среды. Широкое распространение получили методы решения подобных задач, основанные на континуальном моделировании УНТ с использованием теории тонких оболочек [2–5] и нелокального закона физического состояния Эрингена [6]. Как правило, в таких моделях упругая матрица, в которую внедрена УНТ, рассматривается как винклеровское либо пастернаковское основание [5, 7]. Если учет реакции окружающей упругой среды приводит к ожидаемому результату — увеличению собственных частот УНТ [7, 8], то введение в модель параметра нелокальности дает противоположный эффект — снижение всех частот [5]. При этом неожиданный вывод был сделан Ли и Кардоматисом [5] в результате исследования собственных колебаний многостенной УНТ. Ими показано, что наименьшая собственная частота двухстенной УНТ (ДУНТ) может падать при достижении коэффициентом постели винклеровского основания определенного значения. Неоднородность упругой матрицы, обусловленная наличием дополнительных включений, а также начальные напряжения могут существенно влиять на собственные частоты и порождать формы колебаний УНТ, которые не свойственны макроразмерным цилиндрическим оболочкам [9]. В частности, в работе [9] показано, что растягивающие в осевом направлении силы приводят к локализации форм собственных колебаний одностенной УНТ в окрестности линии, на которой коэффициент постели винклеровского основания минимален. Цель данной работы заключается в том, чтобы с использованием асимп-

тотического метода Товстика [10], развитого для тонких макроразмерных оболочек, исследовать аналогичные локализованные формы колебаний предварительно напряженной ДУНТ с учетом ван-дер-Ваальсовых сил взаимодействия стенок и реакции неоднородной упругой среды.

**2. Математическая модель ДУНТ.** Следуя работам [2–5, 9, 11], двухстенную углеродную нанотрубку будем моделировать двумя концентрически вложенными тонкими ортотропными цилиндрическими оболочками толщиной  $h$  с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ). Пусть  $E_1, E_2$  — модули Юнга в осевом и окружном направлениях соответственно,  $\nu_1, \nu_2$  — соответствующие коэффициенты Пуассона, а  $\rho$  — плотность материала для обеих стенок. Упругие параметры в радиальном направлении УНТ не вводим ввиду малости эффективной толщины каждой стенки. Считаем, что ДУНТ предварительно напряжена мембранными осевыми силами  $T_{j,1}^\circ$ . Здесь и ниже первый индекс  $j = 1$  соответствует внутреннему слою, а  $j = 2$  — внешнему.

Для исследования осесимметричных колебаний примем в качестве исходных уравнений модифицированные уравнения Флюгге [12], учитывающие силы межслойного взаимодействия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{1,1}}{\partial x} + \frac{T_{1,1}^\circ}{R_1} \frac{\partial^2 u_{1,1}}{\partial x^2} - R_1 \rho h \frac{\partial^2 u_{1,1}}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial T_{2,1}}{\partial x} + \frac{T_{2,1}^\circ}{R_2} \frac{\partial^2 u_{2,1}}{\partial x^2} - R_2 \rho h \frac{\partial^2 u_{2,1}}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 M_{1,1}}{\partial x^2} + R_1 T_{1,2} - T_{1,1}^\circ \frac{\partial^2 u_{1,3}}{\partial x^2} - R_1^2 p_{12}^* + R_1^2 \rho h \frac{\partial^2 u_{1,3}}{\partial t^2} = 0, \quad (1) \\ \frac{\partial^2 M_{2,1}}{\partial x^2} + R_2 T_{2,2} - T_{2,1}^\circ \frac{\partial^2 u_{2,3}}{\partial x^2} - R_2^2 \left( p_2^* - \frac{R_1}{R_2} p_{12}^* \right) + R_2^2 \rho h \frac{\partial^2 u_{2,3}}{\partial t^2} = 0. \end{aligned}$$

Здесь  $x = x^*/R$ , где  $x^*$  — осевая координата, а  $R = R_2$  — характерный размер,  $t$  — время,  $u_{j,1}, u_{j,3}$  — перемещения стенок в осевом и радиальном направлениях соответственно,  $T_{j,1}, T_{j,2}, M_{j,1}$  — мембранные усилия и изгибающий момент в  $j$ -м слое,  $p_{12}^* = c^*(u_{2,3} - u_{1,3})$  — сила ван-дер-Ваальса с коэффициентом  $c^* = 620 \times 10^{-10} \text{Н/нм}^3$ , а  $p_2^* = -k^*(x)u_{2,3}$  — сила реакции винклеровского основания с переменным коэффициентом постели  $k^*(x)$ . Функция  $k^*(x)$  предполагается дважды дифференцируемой.

Считаем, что ДУНТ является достаточно длинной. Тогда, исследуя локализованные колебания вдали от краев, граничными условиями можно пренебречь.

Введем в рассмотрение макроскопические усилия и моменты  $T_{j,l}^{(m)}, M_{j,1}^{(m)}$ , соответствующие ранее введенным наноразмерным аналогам  $T_{j,l}, M_{j,1}$ :

$$\begin{aligned} T_{j,1}^{(m)} = \frac{hE_1}{(1-\nu_1\nu_2)R_j} \left( \frac{\partial u_{j,1}}{\partial x} + \nu_2 u_{j,3} \right), \quad T_{j,2}^{(m)} = \frac{hE_2}{(1-\nu_1\nu_2)R_j} \left( \nu_1 \frac{\partial u_{j,1}}{\partial x} + u_{j,3} \right), \\ M_{j,1}^{(m)} = \frac{h^3 E_1}{12(1-\nu_1\nu_2)R_j^2} \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

В соответствии с нелокальной теорией упругости Эрингена [6] данные напряжения связаны соотношениями

$$\mathfrak{L}_j(T_{j,l}, M_{j,1}) = \left( T_{j,l}^{(m)}, M_{j,1}^{(m)} \right), \quad (3)$$

где

$$\mathfrak{L}_j = 1 - \frac{(e_0 d)^2}{R_j^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (4)$$

— дифференциальный оператор Эрингена,  $d = 0.142$  нм — расстояние между ближайшими атомами в УНТ, а  $e_0 \approx 0.39$  — так называемая материальная константа нелокальности, которая получена путем сравнения дисперсионных кривых волн в УНТ с данными молекулярной динамики [6].

Упругие параметры  $E_j, \nu_j$  зависят от длины и радиуса УНТ, ее хиральности (двухпараметрической характеристики, определяющей ориентацию правильных шестиугольников с атомами углерода в их вершинах относительно оси трубки), формы колебаний, типа нагрузки и принимаемого значения для эффективной толщины (см. ссылки на литературу, подтверждающую указанную зависимость, в статье [2]). Однако для УНТ типа zigzag и armchair зависимость  $E_j, \nu_j$  от радиуса  $R$  и хиральности становится малой при  $R > 0.75$  нм. Что касается погрешности модели, описываемой уравнениями (1)–(4), то она сильно зависит от типа анизотропии оболочек [2]: если УНТ представляются тонкими ортотропными оболочками, то погрешность модели равна  $\max\{h/R, (d/R)^2\}$  [11], если же стенки моделируются тонкими изотропными оболочками, то она определяется как  $\max\{h/R, d/R\}$  [11]. При выборе эффективной толщины  $h$  нанотрубки, моделируемой тонкой оболочкой (например, изотропной), исходят из того, чтобы жесткости на растяжение  $C = Eh$  и изгиб  $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$  совпадали с данными молекулярного моделирования [13]:  $C = 360$  Н/м,  $D = 1.362 \cdot 10^{-19}$  Н · м. Такой подход приводит к эффективной толщине  $h = 0.066$  нм [13], которая много меньше расстояния  $h = 0.340$  нм между слоями графита. При этом соответствующие упругие параметры оказываются равными  $E = 5.500$  ТПа,  $\nu = 0.19$ . Заметим, что другие значения эффективной толщины УНТ и их влияние на собственные частоты локализованных колебаний одностенной УНТ были рассмотрены в работе [9].

Введем в рассмотрение безразмерный параметр  $\mu = d/R$ , который (при  $R \geq 1.5$  нм) будем считать основным малым параметром. Принимая во внимание сделанный выбор эффективной толщины УНТ, параметр  $\mu_1^4 = h^2/(12R^2)$  также можно считать малым. Пусть  $\mu_1 = \mu\kappa$ , где  $\kappa \sim 1$ .

Для исследования изгибных форм колебаний (с преимущественным колебанием атомов в радиальном направлении) представим перемещения стенок УНТ в виде [9]

$$u_{j,1} = \mu R U_j(x) \exp(i\omega t), \quad u_{j,3} = R W_j(x) \exp(i\omega t), \quad j = 1, 2, \quad (5)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ , а  $\omega$  — искомая частота колебаний.

Введем безразмерные величины по формулам

$$T_{j,1}^\circ = \frac{\mu^2 h E_1}{1 - \nu_1 \nu_2 t_{j,1}^\circ}, \quad k^* = \frac{h E_1 k(x)}{R_2^2 (1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad c^* = \frac{h E_1 c}{R_2^2 (1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad \lambda = \frac{R_2^2 \omega^2 (1 - \nu_1 \nu_2) \rho}{E_1}. \quad (6)$$

Поддействуем на первые два уравнения системы (1) оператором  $\mathfrak{L}_1$ , а на вторую пару уравнений — оператором  $\mathfrak{L}_2$ . Тогда, с учетом соотношений (2)–(6), получим сле-

дующую систему уравнений в безразмерном виде:

$$\begin{aligned}
 & \mu \frac{d^2 U_1}{dx^2} + \nu_2 \frac{dW_1}{dx} + \mu^3 \mathfrak{L}_1 \left( t_{1,1}^\circ \frac{d^2 U_1}{dx^2} \right) + \mu \lambda r^2 \mathfrak{L}_1 U_1 = 0, \\
 & \mu^4 \kappa^4 \frac{d^4 W_1}{dx^4} + \epsilon r^2 \left( W_1 + \mu \nu_1 \frac{dU_1}{dx} \right) - \mu^2 r^2 \mathfrak{L}_1 \left( t_{1,1}^\circ \frac{d^2 W_1}{dx^2} \right) - \\
 & \quad - r^4 c \mathfrak{L}_1 (W_2 - W_1) - \lambda r^4 \mathfrak{L}_1 W_1 = 0, \\
 & \mu \frac{d^2 U_2}{dx^2} + \nu_2 \frac{dW_2}{dx} + \mu^3 \mathfrak{L}_2 \left( t_{2,1}^\circ \frac{d^2 U_2}{dx^2} \right) + \mu \lambda r^2 \mathfrak{L}_2 U_2 = 0, \\
 & \mu^4 \kappa^4 \frac{d^4 W_2}{dx^4} + \epsilon \left( W_2 + \mu \nu_1 \frac{dU_2}{dx} \right) - \mu^2 \mathfrak{L}_2 \left( t_{2,1}^\circ \frac{d^2 W_2}{dx^2} \right) + \mathfrak{L}_2 k(x) W_2 + \\
 & \quad + r c \mathfrak{L}_2 (W_2 - W_1) - \lambda \mathfrak{L}_2 W_2 = 0,
 \end{aligned} \tag{7}$$

где  $\epsilon = E_2/E_1$ ,  $r = R_1/R_2$ .

**3. Локализованные собственные формы колебаний ДУНТ.** Пусть на линии  $x = 0$  коэффициент постели  $k(x)$  удовлетворяет условиям

$$k'(0) = 0, \quad k''(0) > 0, \quad k(0), k''(0) \sim 1. \tag{8}$$

Полагая ДУНТ бесконечной, рассмотрим задачу о нахождении локализованных собственных форм, удовлетворяющих условиям

$$U_j, W_j \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty. \tag{9}$$

Воспользуемся асимптотическим методом Товстика [10], согласно которому решение краевой задачи (8)–(9) ищем в виде

$$U_j = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{n/2} y_{jn}(\xi) \exp[iS(\xi, \mu)], \quad W_j = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{n/2} z_{jn}(\xi) \exp[iS(\xi, \mu)], \tag{10}$$

$$S(\xi, \mu) = \mu^{-1/2} p \xi + \frac{1}{2} b \xi^2, \quad \lambda = \lambda_0 + \mu \lambda_1 + \dots,$$

где  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\text{Im} b > 0$ , а  $y_{jn}(\xi)$ ,  $z_{jn}(\xi)$  — полиномы аргумента  $\xi = \mu^{-1/2} x$ .

Подстановка (10) в систему уравнений (7) приводит к последовательности краевых задач, из которых находятся все неизвестные параметры и функции, входящие в (10). Опуская детали их определения (см. [7, 10]), выпишем лишь основные соотношения.

Для нулевого приближения параметра частоты получаем

$$\lambda_0^{(1)}(p, x) = \frac{a_1 + a_2}{2} - \frac{\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4rc^2}}{2}, \quad \lambda_0^{(2)}(p, x) = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4rc^2}}{2}, \tag{11}$$

где

$$a_1 = \frac{\kappa^4 p^4 + \epsilon(1 - \nu_1 \nu_2)}{1 + \epsilon_0^2 p^2} + k(x) + p^2 t_{2,1}^\circ + rc, \quad a_2 = \frac{\kappa^4 p^4 + \epsilon r^2(1 - \nu_1 \nu_2)}{r^2(r^2 + \epsilon_0^2 p^2)} + \frac{p^2 t_{1,1}^\circ}{r^2} + c.$$

При выводе формул (10), (11) принято, что  $t_{1,2}^\circ, t_{2,1}^\circ$  — константы.

Амплитуды радиальных и продольных перемещений атомов стенок находятся из уравнений

$$y_{10}^{(\iota)} = \frac{i\nu_2}{p} z_{10}^{(\iota)}, \quad y_{20}^{(\varsigma)} = \frac{i\nu_2}{p} z_{20}^{(\iota)}, \quad z_{10}^{(\iota)} = \frac{1}{rc} \left[ a_1 - \lambda_0^{(\iota)} \right] z_{20}^{(\iota)}, \quad \iota = 1, 2. \tag{12}$$

В формулах (11), (12) верхние индексы  $\zeta = 1, 2$  соответствуют разным формам колебаний стенок. Из (11), (12) следует, что  $z_{10}^{(\zeta)} z_{20}^{(\zeta)} > 0$  при  $\zeta = 1$  и  $z_{10}^{(\zeta)} z_{20}^{(\zeta)} < 0$ , если  $\iota = 2$ . Таким образом, все функции и параметры с индексом  $\iota = 1$  соответствуют формам колебаний, при которых стенки двигаются в одном направлении, а с индексом  $\zeta = 2$  — формам, когда движение является разнонаправленным.

Два волновых числа  $p = p_0^{(\iota)}$  ( $\zeta = 1, 2$ ) находятся из решения уравнений  $d\lambda_0^{(\iota)}/dp = 0$ . Как видно из (12), корень  $p = 0$  следует отбросить.

И, наконец, параметры  $b^{(\iota)}$ ,  $\lambda_1^{(\iota, m)}$  и амплитуды  $z_{20}^{(\iota)}$  определяются по формулам

$$b^{(\iota)} = i\sqrt{\lambda_{xx}^{(\iota)}/\lambda_{pp}^{(\iota)}}, \quad \lambda_1^{(\iota, m)} = (m + 1/2)\sqrt{\lambda_{xx}^{(\iota)}\lambda_{pp}^{(\iota)}}, \quad z_{20}^{(\iota)} = P_0^{(m)}(\xi), \quad \iota = 1, 2. \quad (13)$$

Здесь через  $\lambda_{xx}^{(\iota)}$  и  $\lambda_{pp}^{(\iota)}$  обозначены вторые производные функций (10) по  $x$  и  $p$ , вычисленные при  $p = p_0^{(\iota)}$ ,  $x = 0$ , а  $z_{20}^{(\iota)} = \mathfrak{H}_m^{(\iota)}(c^{1/2}\xi)$  — полиномы Эрмита  $m$ -й степени аргумента  $\xi$ , где  $c = \sqrt{\lambda_{xx}^{(\iota)}/\lambda_{pp}^{(\iota)}}$ .

Окончательно, получаем формулы для двух серий частот

$$\omega^{(\iota, m)} = \frac{1}{R_2} \sqrt{\frac{E_1 \lambda_{00}^{(\iota)}}{\rho(1 - \nu_1 \nu_2)}} \left[ 1 + \mu \frac{\lambda_1^{(\iota, m)}}{2\lambda_{00}^{(\iota)}} \right], \quad \lambda_{00}^{(\iota)} = \lambda_0^{(\iota)}(p_0^{(\iota)}, 0), \quad \iota = 1, 2; m = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

**4. Одностенная УНТ.** Если в (11)–(14) положить  $r = 1, c = 0, t_{1,1}^{\circ} = t_{2,1}^{\circ} = t_1^{\circ}$  (здесь  $\zeta = 1$ ), то, как частный случай, приходим к формулам, полученным в [9] для одностенной УНТ:

$$p_0 = \frac{1}{e_0} \sqrt{\frac{\delta_\varepsilon}{\delta_t}} - 1, \quad \lambda_{00} = \lambda_0(p_0, 0) = \frac{1}{e_0^4} \left\{ e_0^2 \left[ -t_1^{\circ} + e_0^2 k(0) \right] + 2 \left( \sqrt{\delta_\varepsilon \delta_t} - \kappa^4 \right) \right\},$$

$$b = i \sqrt{\frac{e_0^2 k''(0)}{8\delta_t \left( 1 - \sqrt{\delta_t/\delta_\varepsilon} \right)}}, \quad \lambda_1^{(m)} = \frac{1 + 2m}{e_0} \sqrt{2k''(0)\delta_t \left( 1 - \sqrt{\delta_t/\delta_\varepsilon} \right)}, \quad (15)$$

где  $\delta_\varepsilon = \kappa^4 + e_0^4 \epsilon(1 - \nu_1 \nu_2)$ ,  $\delta_t = \kappa^4 + e_0^2 t_1^{\circ}$ .

Из первой формулы (15) следует, что  $t_1^{\circ} < e_0^2 \epsilon(1 - \nu_1 \nu_2) = t_{cr}$ . Более того, при  $t_1^{\circ} \rightarrow t_{cr}$  получаем  $\text{Im} b \rightarrow \infty$  и  $\lambda_1^{(m)} \rightarrow 0$ . Данные предельные соотношения указывают на то, что полученные в [9] решения (15) для одностенной УНТ справедливы в асимптотическом смысле, если растягивающее осевое мембранное усилие удовлетворяет неравенству  $T_1^{\circ} < hE_2(de_0/R)^2 = T_1^*$ , где  $T_1^*$  — критическое растягивающее усилие. Видно, что локализация форм колебаний имеет место вблизи линии  $x = 0$ , на которой коэффициент постели  $k(x)$  имеет локальный минимум. Заметим также, что формулы (15) имеют силу лишь при  $e_0 \neq 0$ , то есть для наноразмерной оболочки. В монографии [7, с. 72] показано, что макроразмерная оболочка (при  $e_0 = 0$ ), моделируемая на основе гипотез Кирхгофа–Лява, допускает собственные локализованные формы типа (10) лишь в случае, когда осевая сила является сжимающей.

**5. Анализ собственных частот и форм колебаний ДУНТ.** Пусть обе стенки ДУНТ нагружаются одинаково, так что  $t_{1,1}^{\circ} = t_{2,1}^{\circ} = t_1^{\circ}$ . Критические значения

безразмерного растягивающего усилия можно найти из уравнений

$$\left. \frac{d\lambda_0^{(1)}}{dp} \frac{1}{p} \right|_{p=0} = 0, \quad \left. \frac{d\lambda_0^{(2)}}{dp} \frac{1}{p} \right|_{p=0} = 0. \quad (16)$$

Решая (16) относительно  $t_1^\circ$ , получаем

$$t_{cr}^{(\iota)} = \frac{e_0^2 \epsilon (1 - \nu_1 \nu_2) [(1 + r^4) \sqrt{K^2 + 4rc^2} - (-1)^\iota (1 - r^4) K]}{(1 + r^2) \sqrt{K^2 + 4rc^2} - (-1)^\iota (1 - r^2) \alpha}, \quad \iota = 1, 2, \quad (17)$$

где

$$K = k(0) - c(1 - r) - \frac{\epsilon(1 - \nu_1 \nu_2)(1 - r^2)}{r^2}. \quad (18)$$

Здесь  $t_{cr}^{(1)}$  и  $t_{cr}^{(2)}$  — критические значения усилий для собственных форм с одинаково направленным и разнонаправленным движением стенок соответственно. Если  $K > 0$ , то  $t_{cr}^{(1)} < t_{cr}^{(2)}$ , и наоборот, при  $K < 0$  имеет место неравенство  $t_{cr}^{(1)} > t_{cr}^{(2)}$ . Также, как и для одностенной УНТ, получаем следующие предельные соотношения:  $p_0^{(\varsigma)} \rightarrow 0$ ,  $\text{Im}b^{(\iota)} \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_1^{(\iota, m)} \rightarrow 0$ ,  $y_{j0}^{(\varsigma)} \rightarrow \infty$  при  $t_1^\circ \rightarrow t_{cr}^{(\iota)}$ . Данные соотношения означают, что при значениях осевых сил, близких к  $t_{cr}^{(1)}$  или  $t_{cr}^{(2)}$ , одна из собственных форм с одинаково направленным или разнонаправленным движением стенок вырождается в другую форму колебаний, отличную от (10). Например, если окружающая среда является достаточно мягкой так, что  $K < 0$ , то вырождается локализованная собственная форма с одинаково направленным движением стенок.

Для количественного анализа собственных частот и форм колебаний рассмотрим пример. Пусть переменный коэффициент постели винклеровского основания задается формулой  $k^*(x) = Ac_3^* [1 - \beta \exp(-\alpha x^2)]$ . Каждую стенку ДУНТ будем моделировать изотропной оболочкой, для которой [13]  $E_1 = E_2 = 5.500$  ТПа,  $\nu = 0.19$ . На рис. 1–3 представлены зависимости параметров  $\lambda_{00}^{(\iota)}$ ,  $\lambda_1^{(\iota, 0)}$ ,  $\text{Im}b^{(\iota)}$  от безразмерного растягивающего усилия  $t_{1.1}^\circ = t_{2.1}^\circ = t_1^\circ$  для ДУНТ с радиусами стенок  $R = R_2 = 1.5$  нм,  $R_1 = 1.16$  нм. Расчеты были выполнены при  $A = 0.8$ ;  $\alpha = 1$ ;  $\beta = 0.5$ . Здесь  $t_{cr}^{(1)} = 0.171$ ,  $t_{cr}^{(2)} = 0.235$ , индексы  $\iota = 1$  и  $\iota = 2$  соответствуют собственным формам, при которых стенки двигаются в одном и в разных направлениях соответственно.

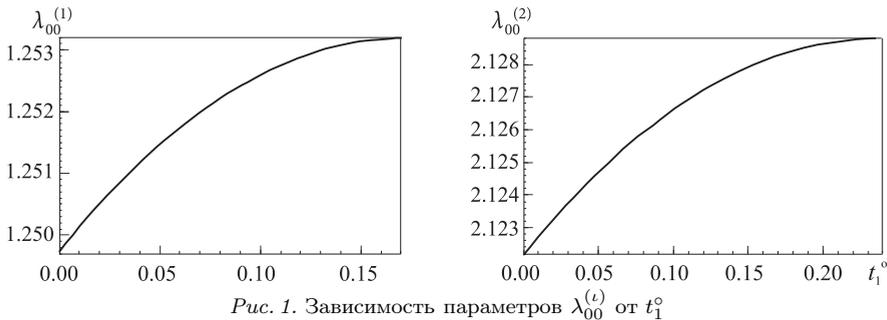


Рис. 1. Зависимость параметров  $\lambda_{00}^{(\iota)}$  от  $t_1^\circ$

Анализ выполненных расчетов показывает, что с увеличением растягивающего осевого усилия волновые параметры  $p_0^{(\iota)}$ , а также поправка  $\lambda_1^{(\iota, 0)}$  убывают и обращаются в ноль при достижении усилием критических значений. И наоборот, параметры

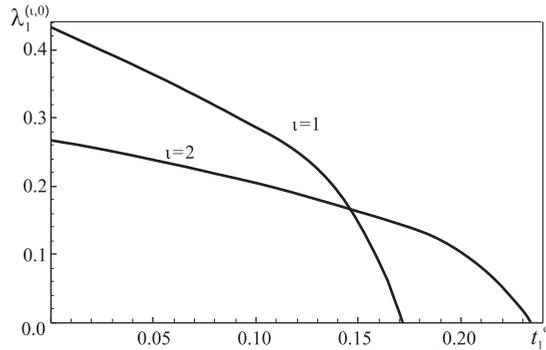


Рис. 2. Зависимость параметра  $\lambda_1^{(l,0)}$  от  $t_1^0$

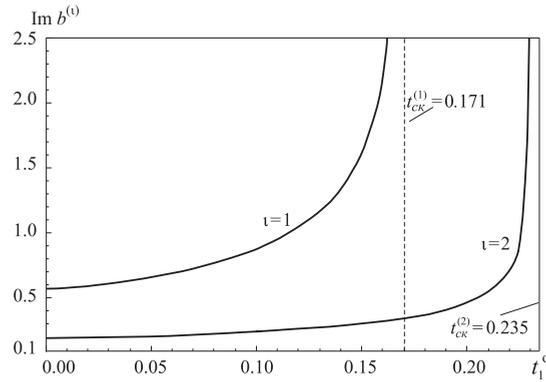


Рис. 3. Зависимость параметра  $\text{Im} b^{(l)}$  от  $t_1^0$

**Зависимость частот  $\omega^{(1,0)}$ ,  $\omega^{(2,0)}$  от безразмерного усилия  $t_1^0$  при  $A = 0.8$**

$t_1^0$	0	0.05	0.10	0.15	0.17	<b>0.171</b>	0.20	0.23	<b>0.235</b>
$\omega^{(1,0)}$ , ТГц	49.41	49.32	49.18	48.96	48.60	—	—	—	—
$\omega^{(2,0)}$ , ТГц	63.73	63.72	63.70	63.66	63.65	63.64	63.59	63.44	—

$\lambda_{00}^{(l)}$  и  $\text{Im} b^{(l)}$  суть монотонно возрастающие функции осевой силы, при этом параметр  $\lambda_{00}^{(l)}$  проявляет очень слабую зависимость от растягивающей силы.

Неограниченный рост параметра  $\text{Im} b^{(l)}$  означает усиление степени локализации форм колебаний ДУНТ вблизи линии  $x = 0$  с ростом силы. Отметим также неограниченное увеличение амплитуды тангенциальных перемещений при  $t_1^0 \rightarrow t_{cr}^{(l)}$ . Данное обстоятельство указывает на возможность разрыва межатомарных связей в трубке вблизи «слабой» линии  $x = 0$  при достаточно низких значениях осевой силы.

В таблице приведены собственные частоты  $\omega^{(1,0)}$ ,  $\omega^{(2,0)}$  для обеих форм колебаний при различных значениях безразмерной растягивающей силы  $t_1^0$ .

Жирным шрифтом выделены критические значения сил  $t_{cr}^{(1)} = 0.171$ ,  $t_{cr}^{(2)} = 0.235$ , при которых построенные собственные формы перестраиваются и имеют вид, отличный от (10). Как и следовало ожидать, частота, отвечающая форме колебаний с одинаковым направлением движения стенок, оказывается меньше частоты соответствующей формы колебаний, при которой движение стенок является разнонаправленным. Укажем также на не характерный для макроразмерных оболочек эффект: для рас-

смаатриваемого коэффициента постели ( $A = 0.8$ ) увеличение растягивающей осевой силы приводит к уменьшению собственных частот для обеих форм колебаний. Расчеты, выполненные при различных значениях параметра  $A$ , свидетельствуют о том, что данный эффект имеет место, если двухстенная нанотрубка лежит в достаточно «жесткой» среде. Однако при  $A \leq 0.4$  данный эффект нарушается. В частности, при  $A = 0.4$  частота  $\omega^{(2,0)}$  второй формы сначала возрастает вместе с  $t_1^0$  в интервале  $0 \leq t_1^0 \leq 0.02$ , а затем начинает убывать, проявляя очень слабую зависимость от силы.

**6. Выводы.** На основе модифицированных уравнений Флюгге теории тонких оболочек, учитывающих ван-дер-Ваальсовы силы, а также нелокального закона физического состояния Эрингена рассмотрена задача о свободных осесимметричных колебаниях двухстенной углеродной нанотрубки, внедренной в неоднородную упругую среду. С использованием асимптотического метода Товстика исследованы формы колебаний, локализованные вблизи линии, где коэффициент постели винклеровского основания имеет локальный минимум. Найдены формы колебаний и соответствующие частоты, отвечающие одинаково направленным и разнонаправленным движениям стенок. Обнаружено, что введение в модель параметра нелокальности «порождает» собственные формы колебаний трубки, которые не свойственны макроразмерным оболочкам. В частности, увеличение растягивающей силы приводит к двум эффектам: 1) большей степени локализации колебаний и росту амплитуды тангенциальных колебаний атомов; 2) убыванию частот в случае, если трубка лежит в достаточно жесткой среде.

## Литература

1. Bakshi S. R., Lahiri D., Agarwal A. Carbon nanotube reinforced metal matrix composites — a review // International Materials Reviews. 2010. Vol. 55 (1). P. 41–64.
2. Peng J., Wu J., Hwang K. C., Song J., Huang Y. Can a single-wall carbon nanotube be modeled as a thin shell? // J. Mech. Phys. Solids. 2008. Vol. 56. P. 2213–2224.
3. Fazelzadeh S. A., Ghavanloo E. Nonlocal anisotropic elastic shell model for vibrations of single-walled carbon nanotubes with arbitrary chirality // Composite Structures. 2012. Vol. 94 (3). P. 1016–1022.
4. Yoon J., Ru C. Q., Mioduchowski A. Vibration of an embedded multiwalled carbon nanotube // Compos. Sci. Technol. 2003. Vol. 63. P. 1533–1542.
5. Li R., Kardomateas G. A. Vibration characteristics of multiwalled carbon nanotubes embedded in elastic media by a nonlocal elastic shell model // J. of Appl. Mech. 2007. Vol. 74. P. 1087–1094.
6. Eringen A. C. Nonlocal continuum field theories. New-York: Springer, 2002.
7. Мухасев Г. И., Товстик П. Е. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках: Асимптотические методы. М.: Физматлит, 2009. 290 с.
8. Arani A. G., Barzoki A. M., Kolahchi R., Loghman A. Pasternak foundation effect on the axial and torsional waves propagation in embedded DWCNTs using nonlocal elasticity cylindrical shell theory // J. Mech. Technol. 2011. Vol. 25 (9). P. 2385–2391.
9. Mikhasev G. On localized modes of free vibrations of single-walled carbon nanotubes embedded in nonhomogeneous elastic medium // ZAMM. 2014. Vol. 94 (1–2). P. 130–141.
10. Товстик П. Е. Двумерные задачи устойчивости и колебаний оболочек нулевой гауссовой кривизны // ДАН СССР. 1983. Т. 271 (1). С. 69–71.
11. Мухасев Г. И. Уравнения движения многостенной углеродной нанотрубки, основанные на нелокальной теории ортотропных оболочек // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55 (6). С. 119–123.
12. Flügge W. Stresses in Shells. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1962.
13. Strozzi M., Manevitch L. I., Pellicano F., Smirnov V. V., Shepelev D. S. Low-frequency linear vibrations of single-walled carbon nanotubes: Analytical and numerical models // J. of Sound and Vibration. 2014. Vol. 333. P. 2936–2957.

Статья поступила в редакцию 22 октября 2015 г.

Михасев Геннадий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор; mikhasev@bsu.by

Ботогова Марина Георгиевна — кандидат физико-математических наук, доцент; botogova@tut.by

## FREE LOCALIZED VIBRATIONS OF A LONG DOUBLE-WALLED CARBON NANOTUBE EMBEDDED IN NONHOMOGENEOUS ELASTIC MEDIUM

Gennadiy I. Mikhasev, Marina G. Botogova

Belarusian State University, pr. Nezavisimosti, 4, Minsk, 220030, Republic of Belarus;

mikhasev@bsu.by, botogova@tut.by

On the basis of the modified Flügge equations for thin cylindrical shells and non-local theory of elasticity, free axisymmetric vibrations of a long double-walled carbon nanotube embedded in nonhomogeneous elastic medium is studied. The surrounding medium is modelled by the Winkler foundation. To take into account the interaction between the nanotube walls, the van-der-Waals forces are introduced into the governing equations. By using the asymptotic method of Tovstik, eigenmodes are constructed in the form of functions decaying far from the line on the outermost wall where the coefficient of soil reaction has a local minimum. Eigenmodes and natural frequencies corresponding to the like-directed and differently directed motions of walls have been found. It has been revealed that the introduction of a parameter of nonlocality into the model «generates» the eigenmodes which are nonrelevant for macro-sized shells. In particular, the increase of the tensile axial force results in: 1) more high rate of localization of vibrations and growing amplitudes of tangential oscillations of atoms; 2) increasing natural frequencies in the case when the tube is in the sufficiently stiffen medium. Refs 13. Figs 3. Tables 1.

*Keywords:* double-walled carbon nanotube, van-der-Waals forces, parameter of nonlocality, nonhomogeneous medium, free vibrations, localization, asymptotic method.

### References

1. Bakshi S. R., Lahiri D., Agarwal A., “Carbon nanotube reinforced metal matrix composites — a review”, *International Materials Reviews* **55**(1), 41–64 (2010).
2. Peng J. Wu J., Hwang K. C., Song J., Huang Y., “Can a single-wall carbon nanotube be modeled as a thin shell?”, *J. Mech. Phys. Solids* **56**, 2213–2224 (2008).
3. Fazelzadeh S. A., Ghavanloo E., “Nonlocal anisotropic elastic shell model for vibrations of single-walled carbon nanotubes with arbitrary chirality”, *Composite Structures* **94**(3), 1016–1022 (2012).
4. Yoon J., Ru C. Q., Mioduchowski A., “Vibration of an embedded multiwalled carbon nanotube”, *Compos. Sci. Technol.* **63**, 1533–1542 (2003).
5. Li R., Kardomateas G. A., “Vibration characteristics of multiwalled carbon nanotubes embedded in elastic media by a nonlocal elastic shell model”, *J. of Appl. Mech.* **74**, 1087–1094 (2007).
6. Eringen A. C., *Nonlocal continuum field theories* (Springer, New York, 2002).
7. Mikhasev G. I., Tovstik P. E., *Localized Vibrations and Waves in Thin Shells. Asymptotic Methods* (Fizmatlit, Moscow, 2009, 290 p.) [in Russian].
8. Arani A. G., Barzoki A. M., Kolahchi R., Loghman A., “Pasternak foundation effect on the axial and torsional waves propagation in embedded DWCNTs using nonlocal elasticity cylindrical shell theory”, *J. Mech. Technol.* **25**(9), 2385–2391 (2011).
9. Mikhasev G., “On localized modes of free vibrations of single-walled carbon nanotubes embedded in nonhomogeneous elastic medium”, *ZAMM* **94**(1–2), 130–141 (2014).
10. Tovstik P. E., “Two-dimensional problems of buckling and vibrations of the shells of zero Gaussian curvature”, *Soviet Phys. Dokl.* **28**(7), 593–594 (1983).
11. Mikhasev G. I., “Governing equations of a multi-walled carbon nanotube based on nonlocal theory of orthotropic shells”, *Dokl. Acad. Sci. Belarus* **55**(6), 119–123 (2011) [in Russian].
12. Flügge W., *Stresses in Shells* (Heidelberg: Springer, Berlin, Göttingen, 1962).
13. Strozzi M., Manevitch L. I., Pellicano F., Smirnov V. V., Shepelev D. S., “Low-frequency linear vibrations of single-walled carbon nanotubes: Analytical and numerical models”, *J. of Sound and Vibration* **333**, 2936–2957 (2014).