

ФИНАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОНКОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ С ОРТОТРОПНЫМ ТРЕНИЕМ

Н. Н. Дмитриев, О. А. Силантьева

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Рассмотрена задача о предельном движении тонкой эллиптической пластины по горизонтальной плоскости при наличии сил ортотропного трения. Выведены дифференциальные уравнения движения пластины. Система уравнений численно решена для различных начальных условий. Показано, что скольжение и вращение прекращаются одновременно. Показано, что предельное поведение пластины зависит не только от соотношения между моментом инерции и коэффициентами трения, но и от её ориентации. Проведено сравнение поведения эллиптической и круговой пластин. Результаты расчетов могут быть использованы для более точного описания явлений, происходящих при контакте колеса и рельса. Библиогр. 14 назв. Ил. 3. Табл. 2.

Ключевые слова: ортотропное трение, эллиптическая площадка, финальное движение.

1. Введение. Неоднородности, связанные с износом или специальной механической обработкой, изменение структуры приповерхностного слоя в процессе контакта и другие эффекты могут приводить к тому, что сила трения становится анизотропной, при этом коэффициенты трения в различных направлениях могут существенно различаться.

В настоящее время детальному изучению систем с трением уделяется большое внимание. Исследователи особенно заинтересованы в построении модели, позволяющей с достаточной степенью точности прогнозировать износ и разрушение контактирующих узлов агрегатов, включая в рассмотрение всё новые и новые факторы, такие как коррозионные эффекты [1], влияние адгезии [2], влияние анизотропии [3]. Подробный обзор экспериментальных и аналитических результатов в трибологии представлен в [4].

Однако в большинстве работ силы трения принимаются изотропными [5], т. е. не зависящими от направления скольжения. Кроме того, наиболее изученным объектом в исследованиях является круговая площадка контакта [6]. Между тем известно, что площадка часто имеет эллиптическую форму (например, в случае контакта колеса поезда и рельса [7]).

Поэтому исследование влияния анизотропного характера трения на поведение объекта с эллиптическим пятном контакта является актуальной и востребованной задачей.

2. Постановка задачи. Рассмотрим предельное движение по инерции тонкой пластины по горизонтальной плоскости, считая, что силы, отличные от сил сухого анизотропного трения, отсутствуют. Движение непосредственно перед полной остановкой П. Д. Вайдман в работе [5] называет финальным. Интерес к этому явлению проявляли, в частности, А. Ю. Ишлинский, Б. Н. Соколов, Ф. Л. Черноусько, Г. М. Розенблат, К. Воэнли, И. Эриксен [8–10]. Будем полагать, что центр нормальных давле-

ний, приложенных к области контакта, совпадает с проекцией центра масс пластины на плоскость. Это допущение позволяет говорить о равновесии относительно горизонтальных осей.

Обозначим через p_M нормальное давление в точке M области контакта пластины с плоскостью. Плотность сил анизотропного трения $\boldsymbol{\tau}$ в точке M движущегося тела согласно [11] определяется формулой

$$\boldsymbol{\tau} = -p_M \mathcal{F}(M) \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \quad (1)$$

где $\mathcal{F}(M)$ — тензор коэффициентов трения, записанный в некоторой системе координат Oxy , \mathbf{v} — вектор скорости точки M .

В работе [3] показано, что существует такая система координат, в которой тензор коэффициентов трения имеет вид

$$\mathcal{F}(M) = \begin{pmatrix} f_x & f \\ -f & f_y \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Будем считать, что компоненты тензора трения остаются постоянными и не зависят от относительной ориентации трущихся поверхностей. Данное предположение справедливо, если твёрдость поверхности одного тела больше твёрдости поверхности другого или одна из поверхностей пары трения имеет изотропную шероховатость. Отметим, что если твёрдости материалов пары трения сопоставимы, то следует учитывать анизотропные свойства двух поверхностей, что приводит к модификации закона трения (1) [11]. Движение диска и кольца при учёте анизотропных свойств обоих материалов пары трения изучалось в [3]. Кроме того, в дальнейшем будем рассматривать ортотропное трение, при котором $f = 0$.

Введём подвижную прямоугольную систему координат $C\xi\eta\zeta$, жёстко связанную с пластиной, полагая, что начало координат совпадает с центром масс пластины, а ось $C\xi$ направлена перпендикулярно плоскости скольжения. Неподвижную систему координат $Oxyz$ выберем так, чтобы оси Ox и Oy принадлежали плоскости, по которой движется пластина, и тензор трения имел вид (2). Угол между осью Ox и осью $C\xi$ обозначим через φ , а через ϑ — угол между вектором скорости центра масс пластины и осью Ox :

$$\mathbf{v}_C = v_C (\cos \vartheta \mathbf{i} + \sin \vartheta \mathbf{j}), \quad (3)$$

где v_C — величина скорости, \mathbf{i} , \mathbf{j} — орты осей Ox , Oy . Вектор угловой скорости пластины имеет вид $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$, где $\omega = \dot{\varphi}$, \mathbf{k} — орт оси Oz .

Формула Эйлера $\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CM}$ позволяет записать проекции скорости точек контакта пластины с плоскостью на оси Ox и Oy через введённые выше величины:

$$\begin{aligned} v_x &= v_C \cos \vartheta - \omega y', & v_y &= v_C \sin \vartheta + \omega x', \\ x' &= \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, & y' &= \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi, \\ v_M &= \sqrt{v_C^2 + \omega^2 (\xi^2 + \eta^2) - 2v_C \omega (\eta \cos(\vartheta - \varphi) - \xi \sin(\vartheta - \varphi))}. \end{aligned} \quad (4)$$

Закон анизотропного трения (1) и формулы (4) позволяют записать проекции главного вектора \mathbf{T} и главного момента \mathbf{M} сил трения относительно центра масс на

оси неподвижной системы координат:

$$\begin{aligned} T_x &= \iint_{\Omega} \tau_x d\xi d\eta, & T_y &= \iint_{\Omega} \tau_y d\xi d\eta, & M_{C\zeta} &= \iint_{\Omega} (\tau_y x' - \tau_x y') d\xi d\eta, \\ \tau_x &= -f_x p(\xi, \eta) \frac{v_x(\xi, \eta)}{v_M(\xi, \eta)}, & \tau_y &= -f_y p(\xi, \eta) \frac{v_y(\xi, \eta)}{v_M(\xi, \eta)}, \end{aligned} \quad (5)$$

через Ω обозначена область интегрирования.

Уравнения движения тела в проекциях на оси естественного трехгранника запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} m\dot{v}_C &= T_\tau = T_x \cos \vartheta + T_y \sin \vartheta, \\ m v_C \dot{\vartheta} &= T_n = -T_x \sin \vartheta + T_y \cos \vartheta, \\ I\dot{\omega} &= M_{C\zeta}, \end{aligned} \quad (6)$$

где m — масса пластины, I — её момент инерции относительно оси $C\zeta$, ω — угловая скорость, T_τ и T_n — проекции главного вектора сил трения \mathbf{T} на тангенциальную и нормальную оси, $M_{C\zeta}$ — момент сил трения относительно оси $C\zeta$, v_C — скорость центра масс пластины.

В системе уравнений (6) перейдём к безразмерным величинам с помощью соотношений

$$\begin{aligned} I &= m a^2 I^*, & \xi &= a \xi^*, & \eta &= a \eta^*, & v_C &= v_C^* \sqrt{a g}, \\ \omega &= \omega^* \sqrt{\frac{g}{a}}, & t &= t^* \sqrt{\frac{a}{g}}, & \dot{\vartheta} &= \frac{d\vartheta}{dt^*} \sqrt{\frac{g}{a}}, & p &= p^* \frac{m g}{S} \end{aligned}$$

и введём переменную $\beta = \frac{v_C}{\omega} = a \beta^*$. В этих формулах a — размерная величина, соответствующая длине максимального отрезка, проходящего через точку C и ограниченного контуром области контакта, S — площадь области контакта тела с плоскостью.

Уравнения (6) в безразмерной форме записываются следующим образом (звёздочки далее опущены):

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= - \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \left[\frac{\beta(f_x + \mu \sin^2 \vartheta) + f_x s_1 + \mu s_3}{s} \right] d\xi d\eta, \\ v_C \frac{d\vartheta}{dt} &= - \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \left[\frac{\beta \mu \sin \vartheta \cos \vartheta + f_x s_2 + \mu s_4}{s} \right] d\xi d\eta, \\ \frac{d\omega}{dt} &= - \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta)}{I} \left[\frac{\beta(f_x s_1 + \mu s_3) + f_x(\xi^2 + \eta^2) + \mu(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi)^2}{s} \right] d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь введены обозначения $\mu = f_y - f_x$,

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{\beta^2 + \xi^2 + \eta^2 - 2\beta(\eta \cos(\vartheta - \varphi) - \xi \sin(\vartheta - \varphi))}, \\ s_1 &= \xi \sin(\vartheta - \varphi) - \eta \cos(\vartheta - \varphi), & s_2 &= \xi \cos(\vartheta - \varphi) + \eta \sin(\vartheta - \varphi), \\ s_3 &= \xi \cos \varphi \sin \vartheta - \eta \sin \varphi \sin \vartheta, & s_4 &= \xi \cos \varphi \cos \vartheta - \eta \sin \varphi \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Поделим первое уравнение системы (7) на третье и обозначим через $\Phi(\beta, \vartheta)$ отношение правых частей этих уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\omega} &= \Phi(\beta, \vartheta), \\ v_C \frac{d\vartheta}{dt} &= T_n(\beta, \vartheta). \end{aligned} \quad (8)$$

Так как сила трения имеет отрицательную мощность, то движение при ненулевых начальных условиях заканчивается остановкой. Поэтому второе уравнение системы (8) позволяет записать соотношение

$$T_n(\beta, \vartheta) \rightarrow 0, \quad \text{при } t \rightarrow t_*, \vartheta \rightarrow \vartheta_*, \beta \rightarrow \beta_*, \quad (9)$$

где ϑ_* и β_* — предельные значения соответствующих величин, t_* — момент времени, соответствующий остановке пластины. Первое уравнение системы (8) может быть проинтегрировано:

$$\omega = \omega_0 \exp \left[- \int_{\beta_0}^{\beta_1} \frac{d\beta}{\beta - \Phi(\beta, \vartheta)} \right]. \quad (10)$$

Следует подчеркнуть, что значение функции $\Phi(\beta, \vartheta)$, кроме величин β и ϑ , зависит от формы области контакта тела с плоскостью, от закона распределения давления $p(\xi, \eta)$, компонентов тензора трения f_x, f_y и угла φ , отвечающего за ориентацию тела на плоскости. Поэтому значение величины β_1 , при котором интеграл в соотношении (10) становится несобственным и стремится к $-\infty$, зависит от параметров механической системы:

$$\beta_1 \rightarrow \beta_*(\vartheta_*, \varphi_*, \Omega, f_x, f_y, p(\xi, \eta)) \quad \text{при } t \rightarrow t_*, \vartheta \rightarrow \vartheta_*, \varphi \rightarrow \varphi_*. \quad (11)$$

Суммируя сказанное, отметим, что к моменту t_* должно выполняться условие (9) и

$$\beta - \Phi(\beta, \vartheta) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow t_*, \vartheta \rightarrow \vartheta_*, \beta \rightarrow \beta_*. \quad (12)$$

Отметим, что для фиксированных $\beta = \tilde{\beta}$ уравнение $T_n(\tilde{\beta}, \vartheta) = 0$ может иметь несколько решений. Но сочетание условий (9) и (12) выполняется для единственных ϑ_*, β_* (см. например, [3]), которые в свою очередь зависят от начальных условий.

Случаи движения, при которых в начальный момент $v_C = 0, \omega \neq 0$ или $v_C \neq 0, \omega = 0$ должны рассматриваться отдельно от случая $v_C \neq 0, \omega \neq 0$. Это связано с тем, что при ряде условий движение может оставаться поступательным или чисто вращательным (см., например, [3]). Однако при несимметричной области контакта или несимметричном распределении давления $p(\xi, \eta)$ при поступательном или чисто вращательном движении возникает начальное угловое ускорение или начальное ускорение центра масс соответственно.

Отметим, что исследование равенства (10) при изотропном трении для тонкого диска и тонкого кольца проводилось в работе [8], а для случая анизотропного трения для этих тел — в [3].

3. Результаты численного эксперимента. Пусть по горизонтальной плоскости по инерции движется тонкая пластина, имеющая форму эллипса с полуосями a

и b , где a — большая полуось эллипса. Будем считать, что давление p в области контакта распределено равномерно, ρ — масса единицы площади пластины. Тогда масса, момент инерции относительно оси $C\zeta$ и давление определяются формулами

$$m = \rho\pi ab, \quad I = \frac{\rho\pi ka^4(1 + \kappa^2)}{4}, \quad p = \frac{mg}{\pi ab}, \quad \kappa = \sqrt{1 - e^2},$$

где e — эксцентриситет эллипса, g — ускорение свободного падения.

Переход к безразмерным величинам в уравнениях (6) с учётом формы контакта тела с плоскостью осуществим по формулам

$$I = \rho\pi ka^4 I^*, \quad \xi = a\xi^*, \quad \eta = a\kappa\eta^*, \quad v_C = v_C^* \sqrt{\frac{ag}{\pi}},$$

$$\omega = \omega^* \sqrt{\frac{g}{a\pi}}, \quad \beta = a\beta^*, \quad t = t^* \sqrt{\frac{a\pi}{g}}, \quad \dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{dt^*} \sqrt{\frac{g}{a\pi}}.$$

Система (7) решалась численно в пакете Matlab. Задача исследовалась при различных соотношениях между коэффициентами трения f_x и f_y .

Верификация численной модели проводилась на известном случае изотропного трения для круговой площадки контакта, как и в [3, 5, 10, 12] значение величины β оказалось равным 0.653.

Отметим, что движение диска по горизонтальной плоскости в случае анизотропного трения характеризуется тем, что скорость центра масс и угловая скорость обращаются в ноль одновременно, что подтверждено экспериментально в работе [5]. При этом соотношения между v и ω непосредственно перед моментом остановки зависят от величины $\mu = f_y - f_x$ ($f_y \geq f_x$) и при $f_x = 0.42$ представлены в табл. 1.

Таблица 1. Зависимость величины β непосредственно перед остановкой от μ при скольжении диска по плоскости с ортотропным трением ($f_x = 0.42$)

μ	0.00	0.03	0.06	0.09	0.12	0.15	0.18
β	0.653	0.697	0.739	0.779	0.816	0.859	0.890

На рис. 1 представлено решение системы (7) для некоторых значений μ и начальных условий $t = 0$, $v_C = 1$, $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, $\omega = 1$ в случае круговой площадки контакта. Сплошной линией показан случай, когда сила трения изотропна. Видно, что при этом угол ϑ остаётся неизменным. В анизотропных случаях ϑ обращается в ноль.

В случае эллиптической площадки контакта скольжение и вращение также останавливаются одновременно, однако характерные значения параметра β , расстояния до мгновенного центра скоростей, заметно ниже.

На рис. 2 представлено решение системы (7) при тех же начальных условиях для эллипса с соотношением осей $b = 0.6a$ и начальном значении угла $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$. Видно, что при движении эллиптической пластины даже в случае изотропного трения угол ϑ меняется: вектор скорости поворачивается в сторону, противоположную угловой скорости пластины. Данный результат согласуется с исследованием Г. М. Розенבלата [9], в котором изучалось движение узкой прямоугольной пластины по плоскости.

В табл. 2 представлены характерные значения величины β при конечном значении угла $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Параметры β_* , θ_* непосредственно перед остановкой существенно зависят от ориентации эллипса непосредственно перед окончанием скольжения. В

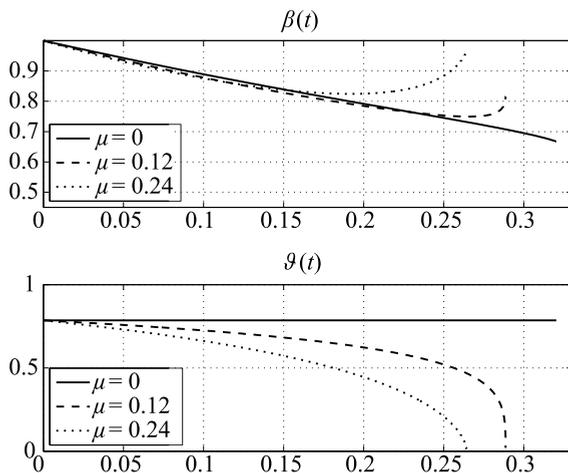


Рис. 1. Влияние анизотропии сил трения на эволюцию параметров β и ϑ для диска

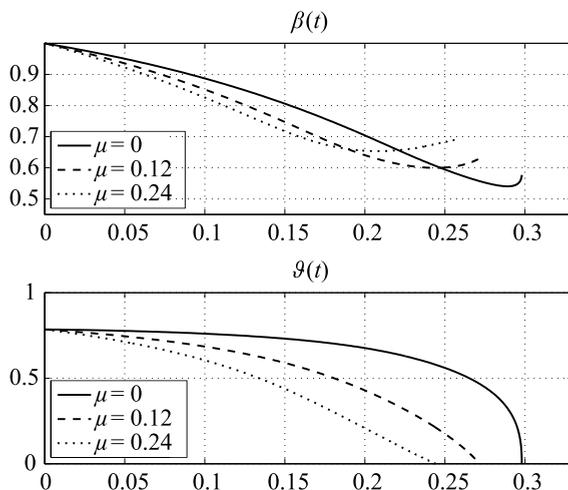


Рис. 2. Влияние анизотропии сил трения на эволюцию параметров β и ϑ для эллипса $b = 0.6a$

Таблица 2. Зависимость величины β непосредственно перед остановкой от μ при скольжении эллиптической пластины ($e = 0.866$) по плоскости с ортотропным трением ($f_x = 0.42$)

μ	0.00	0.03	0.06	0.09	0.12	0.15	0.18
$\varphi_* = \pi/2$	0.577	0.593	0.608	0.623	0.637	0.650	0.664

свою очередь угол φ зависит от начальных условий: $t = 0, \varphi = \varphi_0, \omega = \omega_0, v = v_0$, т. е. $\varphi_* = \varphi_*(v_0, \omega_0, \varphi_0, f_x, f_y, p)$.

Непосредственное решение системы уравнений (7) подтверждает справедливость пределов (9) и (12).

На рис. 3 представлена зависимость нормальной компоненты силы трения от времени. Во всех случаях, как для круговой площадки, так и для пластины, имею-

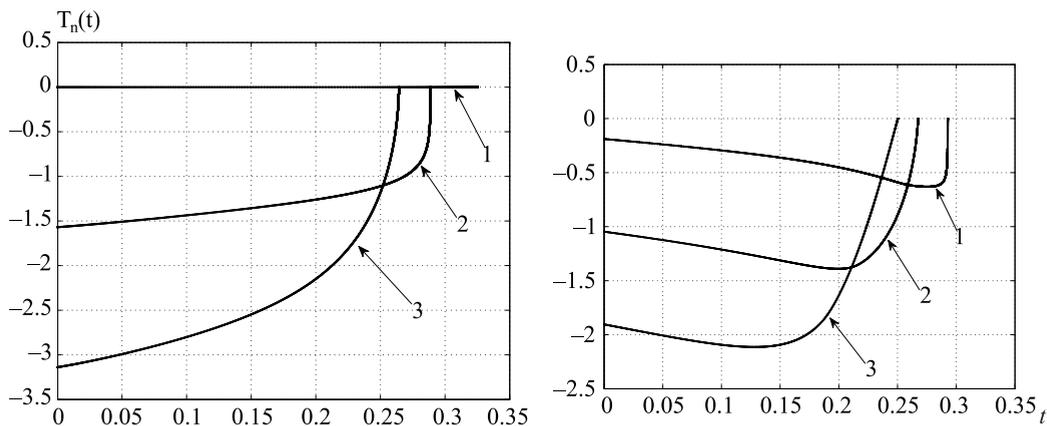


Рис. 3. Эволюция нормальной силы для диска (слева), эллипса ($e = 0.866$) при различных значениях μ : 0 — кривая 1; 0.12 — кривая 2; 0.24 — кривая 3

щей форму эллипса, к моменту остановки нормальная составляющая силы трения стремится к нулю. При этом движение тонкого диска при изотропном трении характеризуется тем, что $T_n = 0$ при $t \in [0, t_*)$, что согласуется с [8].

Отметим, что интегралы, стоящие в (7), для данной задачи можно непосредственно вычислить в координатах ξ и η (см. [13]), а также можно применить метод А. И. Лурье [14].

4. Заключение. В работе поставлена и решена актуальная задача скольжения эллиптической пластины в условиях анизотропии трения на поверхности. Численно решена система дифференциальных уравнений движения тонкой эллиптической пластины при наличии сил анизотропного трения. Проведено наглядное сравнение поведения эллиптической и круговой площадок при одних и тех же начальных условиях. Показано, что скольжение и вращение заканчиваются одновременно в обоих случаях. Показано, что нормальная составляющая силы трения становится нулевой в момент окончания движения. Кроме того, определено, что существенное влияние на предельное положение мгновенного центра скоростей оказывает не только соотношение между моментом инерции и коэффициентами трения, но и ориентация эллипса непосредственно перед полной остановкой.

Литература

1. Ohe C. B. von der, Johnsen R., Espallargas N. Multi-degradation behavior of austenitic and super duplex stainless steel — The effect of 4-point static and cyclic bending applied to a simulated seawater tribocorrosion system // *Wear*. Vol. 288. 2012. P. 39–53.
2. Konyukhov A., Vielsack P., Schweizerhof K. On coupled models of anisotropic contact surfaces and their experimental validation // *Wear*. Vol. 264. 2008. P. 579–588.
3. Дмитриев Н. Н. Движение диска и кольца по плоскости с анизотропным трением // *Трение и износ*. Т. 23, № 1. 2002. С. 10–15.
4. Zmitrowicz A. Models of kinematic dependent anisotropic and heterogeneous friction // *J. of Solids and Structures*. Vol. 43, № 14. 2006. P. 4407–4451.
5. Вайдман П. Д., Мальотра Ч. О финальном движении скользящих и вращающихся дисков с однородным кулоновым трением // *Нелинейная динамика*. Т. 7, № 2. 2011. С. 339–365.
6. Дмитриев Н. Н. Скольжение твёрдого тела, опирающегося на круговую площадку, по горизонтальной плоскости с ортотропным трением. Часть 1. Равномерное распределение нагрузки // *Трение и износ*. Т. 30, № 4. 2009. С. 227–236.

7. Piotrowski J., Chollet H. Wheel-rail contact models for vehicle system dynamics including multi-point contact // *Vehicle Syst. Dyn.* Vol. 43, N6–7. 2005. P. 455–483.
8. Ишлтинский А. Ю., Соколов Б. Н., Черноушко Ф. Л. О движении плоских тел при наличии сухого трения // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1981, № 4. С. 17–28.
9. Розенблат Г. М. Динамические системы с сухим трением. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. 204 с.
10. Voyenli K., Eriksen E. On the motion of an ice hockey puck // *Amer. J. Phys.* 1985. Vol. 53. P. 1149–1153.
11. Zmitrowicz A. Mathematical descriptions of anisotropic friction // *International Journal of Solids and Structures.* Vol. 25, N8. 1989. P. 837–862.
12. Farkas Z., Bartels G., Unger T., Wolf D. E. Frictional coupling between sliding and spinning motion // *Phys. Rev. Lett.* Vol. 90. Issue 24. 2003. P. 248–302.
13. Dmitriev N. N., Silantyeva O. A. About the movement of a solid body on a plane surface in accordance with elliptic contact area and anisotropic friction force // *Proc. of jointly organised WCCM XI, ECCM V, ECFD VI, Spain, CIMNE.* Vol. IV. 2014. P. 4440–4452.
14. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит. 1961.

Статья поступила в редакцию 22 октября 2015 г.

Сведения об авторах

Дмитриев Никита Николаевич — кандидат физико-математических наук, доцент; dn7@rambler.ru
 Силантьева Ольга Александровна — аспирант; olga.silantyeva@gmail.com

TERMINAL MOVEMENT OF THE THIN ELLIPTICAL PLATE ON THE HORIZONTAL PLANE WITH ORTHOTROPIC FRICTION

Nikita N. Dmitriev, Olga A. Silantyeva

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; dn7@rambler.ru, olga.silantyeva@gmail.com

In a number of engineering problems friction forces can vary significantly depending on the direction of sliding. This research deals with orthotropic friction. The presented model describes final motion of the thin elliptical plate on the horizontal plane. The system of differential equations, which describe dynamical behavior of the plate, is solved numerically for different initial conditions. Final movement of the plate depends from interrelations between the moment of inertia, friction coefficients and plate orientation. The comparison of the motion of elliptical and circle plates is presented. It is shown that sliding and spinning end simultaneously for both types of plates. The results may be used for more accurate simulations of railway contact. Refs 14. Figs 3. Tables 2.

Keywords: orthotropic friction, elliptical plate, terminal movement.

References

1. Ohe C. B. von der, Johnsen R., Espallargas N., “Multi-degradation behavior of austenitic and super duplex stainless steel — The effect of 4-point static and cyclic bending applied to a simulated seawater tribocorrosion system”, *Wear* **288**, 39–53 (2012).
2. Konyukhov A., Vielsack P., Schweizerhof K., “On coupled models of anisotropic contact surfaces and their experimental validation”, *Wear* **264**, 579–588 (2008).
3. Dmitriev N. N., “Movement of the disk and the ring over the plane with anisotropic friction”, *J. Fric. Wear* **23** (1), 10–15 (2002) [in Russian].
4. Zmitrowicz A. “Models of kinematic dependent anisotropic and heterogeneous friction”, *J. of Solids and Structures* **43**(14), 4407–4451 (2006).
5. Weidman P. D., Malhotra Ch. P., “On the Terminal Motion of Sliding Spinning Disks with Uniform Coulomb Friction”, *Phys. D.* **233**(1), 1–13 (2007).
6. Dmitriev N. N., “Sliding of a solid body supported by a round platform on a horizontal plane with orthotropic friction. Part 1. Regular load distribution”, *J. Fric. Wear* **30**(4), 227–236 (2009) [in Russian].
7. Piotrowski J., Chollet H., “Wheel-rail contact models for vehicle system dynamics including multi-point contact”, *Vehicle Syst. Dyn.* **43**(6–7), 455–483 (2005).

8. Ishlinskii A. Yu., Sokolov B. N., Chernous'ko F. L., "On the motion of plane bodies in the presence of dry friction", *Izv. AN SSSR. MTT (Mechanics of Solids)* (4), 17–28 (1981) [in Russian].
9. Rozenblat G. M., "Dynamical Systems with Dry Friction", *NITs Regular and Chaotic Dynamics* (Moscow, Izhevsk, 2006, 204 p.) [in Russian].
10. Voyerli K., Eriksen E., "On the motion of an ice hockey puck", *Amer. J. Phys.* **53**, 1149–1153 (1985).
11. Zmitrowicz A., "Mathematical descriptions of anisotropic friction", *International Journal of Solids and Structures* **25**(8), 837–862 (1989).
12. Farkas Z., Bartels G., Unger T., Wolf D. E., "Frictional coupling between sliding and spinning motion", *Phys. Rev. Lett.* **90**, Issue 24, 248–302 (2003).
13. Dmitriev N. N., Silantyeva O. A., "About the movement of a solid body on a plane surface in accordance with elliptic contact area and anisotropic friction force", *Proc. of jointly organised WCCM XI, ECCM V, ECFD VI, Spain, CIMNE IV*, 4440–4452 (2014).
14. Lurye A. I., *Analytical Mechanics* (Fizmatlit, Moscow, 1961) [in Russian].